

23 de Febrero de 2016

**Consejo Divisional de Ciencias Básicas e Ingeniería**

Presente

Atendiendo a lo dispuesto en el Artículo 39 del Reglamento de Becas del Personal Académico, por este conducto me permito entregar el informe de actividades realizadas en el primer semestre (2016-1) de los estudios de doctorado en Ingeniería Eléctrica que estoy realizando en la Universidad Nacional Autónoma de México. Además del informe se anexa el acta de evaluación semestral donde se observa que se acreditó el primer semestre del doctorado y el comprobante de inscripción al segundo semestre (2016-2).

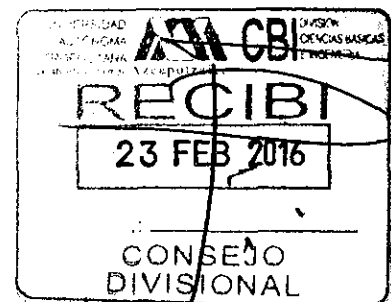
Atentamente



**M. en C. Felipe de Jesús González Montañez**

Profesor Asociado D

Departamento de Energía



Reporte de Actividades del Primer Semestre 2016 – 1:  
**Simulación de Dispositivos de Electrónica de Potencia  
Acoplados a Sistemas Electromecánicos modelados por  
Elementos Finitos**

*Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería*

Felipe Gonzalez-Montañez  $\nabla^2$

Comité Tutorial:

Dr. Rafael Escarela Pérez (Tutor de Tesis)

Dr. Frederic Trillaud Pighi

Dr. Enrique Melgoza Vázquez

Enero, 2016

## Índice

|  |    |
|--|----|
| 1. Resumen   | 2  |
| 2. Breve Introducción al Electromagnetismo de baja frecuencia        | 3  |
| 2.1. Aproximación cuasi-estática                                     | 5  |
| 2.2. Campos Electrostáticos  | 6  |
| 2.3. Campos Magnéticos   | 7  |
| 2.3.1. Campos Magnetostáticos  | 7  |
| 2.3.2. Campos Magnetodinámicos                                       | 7  |
| 2.4. Analogía con otras disciplinas                                  | 9  |
| 3. El <i>MEF</i> Aplicado al Electromagnetismo de baja frecuencia    | 11 |
| 3.1. Historia del método   | 11 |
| 3.2. Solución a problemas con valor en la frontera                   | 12 |
| 3.3. El método de Galerkin aplicado a problemas de electromagnetismo | 14 |
| 3.3.1. Ensamble  | 18 |
| 3.4. Condiciones de Frontera   | 18 |
| 4. Observaciones para el problema de acoplamiento                    | 18 |
| 5. Problema base a Resolver  | 21 |
| 6. Plan de trabajo para el semestre 2016 – 2                         | 21 |

## 1. Resumen

Como parte de la evaluación semestral en este reporte se presentan las temáticas estudiadas durante este periodo. Siguiendo el cronograma de actividades presentado en el protocolo de investigación, para el primero y segundo semestre se planteo la revisión de la literatura de los temas bases como el electromagnetismo de baja frecuencia, el método de elementos finitos (MEF) aplicado al análisis de dispositivos electromagnéticos en 2D, electrónica de potencia y el método análisis nodal modificado (MNA) para la creación de ecuaciones campo-circuito con acoplamiento fuerte. El reporte se divide en cuatro partes principales. Iniciando con una breve introducción del electromagnetismo de baja frecuencia utilizando la aproximación cuasi-estática hasta llegar a los modelos electrostáticos en términos del potencial eléctrico escalar y a los modelos magnéticos, se desarrolla la ecuación de difusión en términos del potencial magnético vectorial para dos dimensiones. En la segunda parte se aborda una introducción a los métodos para solución de ecuaciones diferenciales parciales y se hace énfasis en el método de residuales ponderados especialmente en el método de Galerkin, para el entendimiento del método de Galerkin se plantea la ecuación de difusión en su forma armónica, se propone una estimación a la solución, se eligen elementos triangulares de primer orden y se introduce el concepto de las funciones de forma y ponderación hasta llegar a la matriz de inercia, matriz de masa y vector de fuerza. En la tercera parte se realizan algunas observaciones para atender la problemática del acoplamiento de circuitos eléctricos y circuitos de electrónica de potencia a modelos de elementos finitos. En la ultima parte se propone un problema base para trabajar la simulación de dispositivos de electrónica de potencia acoplados a sistemas electromecánicos modelados por elementos finitos. Siguiendo con el cronograma de actividades del protocolo de investigación, en la ultima parte se menciona el plan de trabajo para el semestre 2016 – 2.

## Notación

Para mantener claro el alcance de este reporte se utilizan los siguientes símbolos para definir elementos u operadores matemáticos. Las variables entre corchetes denotan una matriz (e.g.,  $[S]$ ), mientras las que están entre llaves denotan un vector (e.g.,  $\{N\}$ ) y la letra  $T$  se refiere a la transpuesta de un vector (e.g.,  $\{N\}^T$ ). El símbolo  $\delta$  denota el operador rotacional a un campo vectorial, de la misma forma la expresión  $\nabla$  define el operador gradiente o divergencia según sea el tipo de variable al que este aplicando, el operador  $\mathcal{L}$  representa el operador Laplaciano. Los siguientes símbolos se utilizan para definir los modelos electromagnéticos:

|                 |                             |
|-----------------|-----------------------------|
| $j = \sqrt{-1}$ | Número imaginario           |
| $\phi$          | Potencial eléctrico escalar |
| $\phi_m$        | Potencial magnético escalar |

|                  |  |
|------------------|--|
| E                | Intensidad de campo eléctrico                      |
| H                | Intensidad de campo magnético                      |
| D                | Densidad de campo eléctrico                        |
| B                | Densidad de campo magnético                        |
| J                | Densidad de corriente eléctrica                    |
| A                | Potencial magnético vectorial                      |
| $\rho$           | Densidad de carga eléctrica                        |
| $\mu$            | Permeabilidad magnética                            |
| $\nu = \mu^{-1}$ | Reluctibilidad magnética                           |
| $\varepsilon$    | Permitividad eléctrica                             |
| $\sigma$         | Conductividad eléctrica                            |
| V                | Diferencia de potencial eléctrico                  |
| $A_z$            | Potencial magnético vectorial en la componente z   |
| $J_z$            | Densidad de corriente eléctrica en la componente z |
| I                | Corriente de devanado                              |

## 2. Breve Introducción al Electromagnetismo de baja frecuencia

El electromagnetismo es la rama de la ingeniería eléctrica (o de la física) que tiene que ver con el análisis y aplicación de campos eléctricos y magnéticos. Los principios electromagnéticos (EM) se aplican en varias disciplinas afines, como máquinas eléctricas, conversión de energía electromecánica, meteorología por radar, sensores remotos, comunicaciones satelitales, bioelectromagnética, interferencia y compatibilidad electromagnéticas, plasmas y fibra óptica. Los dispositivos electromagnéticos incluyen motores y generadores eléctricos, transformadores, electroimanes, sistemas de levitación magnética, antenas, radares, hornos de microondas, antenas parabólicas, superconductores y electrocardiogramas, entre otros. En la ingeniería electromagnética, el análisis de circuitos eléctricos, magnéticos y máquinas eléctricas se aplica en electromagnetismo de bajas frecuencias, a estos sistemas se les conoce como sistemas cuasi-estáticos.

El diseño de estos dispositivos requiere un profundo conocimiento de las leyes y principios electromagnéticos. Se considera que el electromagnetismo EM es una de las disciplinas más difíciles de la ingeniería eléctrica. Una razón de ello es que los fenómenos electromagnéticos son más bien abstractos. Pero a quien le gustan las matemáticas y puede visualizar lo invisible debería considerar la posibilidad de especializarse en EM, ya que pocos ingenieros eléctricos lo hacen. Ingenieros eléctricos especializados en EM son necesarios en las industrias relacionadas con el diseño de máquinas eléctricas como son motores, generadores, actuadores y transformadores, también son requeridos en laboratorios de investigación electromagnética y varias industrias de comunicaciones [1].

El comportamiento de los fenómenos electromagnéticos se puede dividir en dos grupos, en electromagnetismo de alta frecuencia que es el que se encarga de estudiar las aplicaciones de comunicaciones como antenas y ondas. Y el electromagnetismo de baja frecuencia el cual se puede dividir en dos partes, en problemas de electrostática y problemas magnéticos.

De forma general todos los fenómenos electromagnéticos los podemos analizar y estudiar a través de las ecuaciones de Maxwell que se presentan a continuación en su forma diferencial

$$\delta \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D} \quad (1)$$

$$d\mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\delta \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (3)$$

$$d\mathbf{D} = \rho \quad (4)$$

también, tenemos las ecuaciones constitutivas que relacionan las variables electromagnéticas a través de las propiedades físicas del dominio de estudio.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5)$$

Una quinta ecuación se puede utilizar para determinar la densidad de campo magnético por medio del rotacional de un campo vectorial

$$\delta \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (6)$$

el potencial magnético vectorial es de mucha ayuda para manejar una sola componente y poder representar la densidad e intensidad de campo magnético.

Se puede notar que la ecuación de Gauss para campos magnéticos 2 se sigue cumpliendo debido a que la divergencia de cualquier campo vectorial producido por un rotacional siempre es cero  $d(\delta \mathbf{F}) = 0$ . Considerando la identidad anterior podemos analizar la ley de Ampere 1 aplicando la divergencia tenemos

$$d\mathbf{J} = -\partial_t (d\mathbf{D})$$

sustituyendo la ecuación de Gauss para campos eléctricos 4 podemos llegar la ecuación de continuidad que establece la conservación de la carga

$$d\mathbf{J} = -\partial_t \rho \quad (7)$$

si  $\partial_t \rho = 0$  podemos establecer las leyes básicas de circuitos eléctricos donde la suma de corrientes en un nodo siempre es igual a cero.

## 2.1. Aproximación cuasi-estática

Consideremos un campo vectorial  $\mathbf{F}$  dependiente del tiempo  $t$  y del espacio  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ , donde  $\partial_t \mathbf{F}$  es la derivada respecto al tiempo y  $\partial_{(x,y,z)} \mathbf{F}$  son las derivadas espaciales. Los sistemas cuasi-estáticos se pueden expresar por la siguiente característica [2].

$$\left| \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{F} \right| \ll |\mathbf{F}|$$

La velocidad de la onda dentro de un material y en el espacio vacío se puede expresar con la siguiente relación

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad C_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad C_m \ll C_0$$

donde  $C_0$  es la velocidad de la luz y es del orden de  $9 \times 10^{13}$  [m/s], la velocidad de la onda en el material dependerá de las propiedades eléctricas y magnéticas del mismo.

En términos de energía las componentes generadas por el campo magnético son predominantes a las del campo eléctrico, esto es

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \ll \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad \text{ó} \quad C_0 |\mathbf{E}| \ll \epsilon_0 |\mathbf{B}|$$

Ahora, se analiza el termino de la corriente de desplazamiento  $\partial_t \mathbf{D}$  utilizando la consideración cuasiestática

$$|\partial_t \mathbf{D}| \cong \epsilon_0 \underbrace{|\partial_t \mathbf{E}| \ll \epsilon_0 C_0 |\mathbf{E}|}_{\text{aproximación cuasi-estática}} \ll \epsilon_0 C_0^2 |\mathbf{B}| \cong \epsilon_0 C_0^2 \mu_0 |\mathbf{H}| = |\mathbf{H}|$$

ó

$$|\partial_t \mathbf{D}| \ll |\mathbf{H}|$$

En conclusion el rotacional del campo  $\mathbf{H}$  generado por la fuente  $\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}$  es creado principalmente por la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , entonces, de ahora en adelante para todos los análisis de electromagnetismo en baja frecuencia no se tomara en cuenta la corriente de desplazamiento, finalmente la ley de Ampere se considerará de las siguiente forma

$$\delta \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

## 2.2. Campos Electrostáticos

Los problemas electrostáticos son muy populares en el área de lentes ópticos y descargas eléctricas. La distribución de campo eléctrico en lentes de electrones es de mucho interés para fundición de metales como el oro en tarjetas de circuitos electrónicos, sistemas similares se utilizan para la nano óptica muchos de estos modelos y por lo general son modelos axi-simétricos [3], [4], [5]. También, los modelos electrostáticos son muy populares en descargas eléctricas para la determinación de fallas por alto voltaje o la caracterización de materiales dieléctricos [6].

El análisis de los campos electrostáticos implica no atender las componentes magnéticas y la ley de Faraday se reduce a

$$\delta \mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

existe una identidad vectorial que nos permite expresar el rotacional igual a cero en términos del gradiente de un campo escalar  $\delta(d\phi) = 0$ , entonces podemos expresar el campo eléctrico como

$$\mathbf{E} = -d\phi \quad (9)$$

el signo negativo es utilizando la convención de la dirección de la intensidad del campo con respecto a la caída del potencial  $\phi$ , esto implica que el potencial en un punto a cierta distancia será mas grande que en otro punto a mayor distancia.

Considerando la ley de Gauss para campos eléctricos podemos establecer la ecuación de Poisson

$$d(\epsilon d\phi) = -\rho \quad (10)$$

en aquellos casos donde no hay carga estática ( $\rho = 0$ ) para un material dieléctrico simple y en materiales conductores, podemos expresar la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} d(\epsilon d\phi) &= 0 \\ d(\sigma d\phi) &= 0 \end{aligned}$$

o en un espacio homogéneo

$$\begin{aligned}\epsilon\mathcal{L}\phi &= 0 \\ \sigma\mathcal{L}\phi &= 0\end{aligned}$$

en estos casos la fuente del campo eléctrico en el dominio de estudio es la condición de frontera a través de la diferencia de potencial en los bordes.

### 2.3. Campos Magnéticos

En el análisis de sistemas magnéticos se descuida la componente de campo eléctrico generado por las cargas electrostáticas, esto nos lleva a manejar tres de las cuatro ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ d\mathbf{B} &= 0 \\ \delta\mathbf{E} &= -\partial_t\mathbf{B}\end{aligned}$$

#### 2.3.1. Campos Magnetostáticos

En magnetostática se considera que ninguna cantidad es dependiente del tiempo, por lo cual tenemos las ecuaciones anteriores pero considerando  $\delta\mathbf{E} = 0$ , esta ecuación no juega ningún papel en el análisis ya que simplemente podemos determinar a  $\mathbf{E}$  a través de las relaciones constitutivas. Considerando el potencial magnético vectorial  $\delta\mathbf{A} = \mathbf{B}$  y una región homogénea se puede establecer la ecuación de Poisson de la siguiente forma

$$-\mu^{-1}\mathcal{L}\mathbf{A} = \mathbf{J} \tag{11}$$

#### 2.3.2. Campos Magnetodinámicos

ahora, en esta sección se van a discutir los problemas dependientes en el tiempo a diferencia del caso magnetostático en este tipo de problemas la  $\partial_t\mathbf{B}$  no es cero.

La ley de inducción de Faraday ayuda a determinar las corrientes inducidas en los materiales conductores, este fenómeno se presenta en una gran variedad de sistemas como son las máquinas eléctricas más populares (máquinas de inducción) y los sistemas de levitación magnética MagLev [7]. A continuación se determinara las reglas que gobiernan estos efectos a través del ya definido potencial magnético vectorial  $\delta\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , sustituyendo esta variable en la ley de Faraday tenemos

$$\delta\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B} = -\partial_t(\delta\mathbf{A}) = \delta(-\partial_t\mathbf{A}) \tag{12}$$

las dos componentes vectoriales tienen aplicado el operador rotacional, esto es posible solo si

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - d\phi \quad (13)$$

de forma similar que en el caso electrostático podemos ver que aparece el gradiente del potencial eléctrico  $d\phi$ , esto implica  $\partial_t \mathbf{A}$  es el campo eléctrico inducido, colocando este resultado en la ley de Ampere y considerando las relaciones constitutivas tenemos

$$\delta\mu^{-1}\delta\mathbf{A} = -\sigma d\phi - \sigma\partial_t \mathbf{A} \quad (14)$$

considerando

$$\mathbf{J}_0 = -\sigma d\phi \quad (15)$$

como la densidad de corriente impuesta por un circuito externo (esta parte es muy importante para el desarrollo del trabajo), podemos escribir la ecuación de difusión como

$$-\mu^{-1}\mathcal{L}\mathbf{A} = \mathbf{J}_0 - \sigma\partial_t \mathbf{A} \quad (16)$$

de esta forma podemos trabajar con una sola ecuación, pero aún debemos resolver para tres componentes. Una gran simplificación es trabajar en problemas de dos dimensiones, estos problemas implican que no tenemos cambios en la dirección  $z$  para el marco de referencia cartesiano, esto es que la parcial con respecto de la dirección  $z$  sea siempre igual a cero. En este caso todas las componentes de campo magnético se encontrarán en el plano  $x-y$ , Para la ecuación de la ley de Ampere considerando que no existen cambios en la dirección  $z$  y que  $\mathbf{B} = 0$ , se observa que

$$\mathbf{J} = J_z \hat{k} \quad \implies \quad \mathbf{A} = A_z \hat{k}$$

donde  $\hat{k}$  es el vector unitario en la dirección  $z$ . Ahora, trabajando en dos dimensiones en vez de resolver la ecuación de Poisson para 3 componentes de  $\mathbf{A}$ , sólo tenemos que resolver en  $\mathbf{A} = A_z \hat{k}$  esto implica que utilizando el potencial magnético vectorial podemos reemplazar la ecuación vectorial por un problema escalar de valor en la frontera.

$$-\mu^{-1}\mathcal{L}A = J_0 - \sigma\partial_t A \quad (17)$$

donde

$$\mathbf{B} = \partial_y A \hat{i} - \partial_x A \hat{j} \quad (18)$$

con  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  como vectores unitario en la dirección  $x$  y  $y$ .

## 2.4. Analogía con otras disciplinas

Las técnicas de análisis numérico son de gran importancia en diferentes disciplinas de la ingeniería, las ecuaciones en diferenciales parciales son muy similares a las mostradas en este reporte. La necesidad de considerar otras disciplinas es evidente ya que muchos de los problemas requieren del uso de *Multifísica*, por ejemplo en el análisis de transformadores y máquinas eléctricas se pueden estudiar los fenómenos electromagnéticos aunados a los efectos térmicos que son de gran importancia para el estudio de fallas, otro ejemplo sería el estudio de la aplicación de los *superconductores* en las aplicaciones de ingeniería eléctrica. En la tabla 1 se presentan las analogías con otras disciplinas donde aparece la ecuación de Poisson [8] y [9].

Tabla 1: Analogía con otras disciplinas en la ecuación de Poisson

|                              |   |
|------------------------------|---|
| 1. Magnetismo                | $\mathbf{A}$ = potencial magnético vectorial<br>$\mu$ = permeabilidad<br>$\mathbf{J}$ = densidad de corriente<br>$\mathbf{B}$ = densidad de flujo<br>$\mu^{-1}\mathcal{L}A_z = -J_z$              |
|                              | $\phi_m$ = potencial magnético escalar<br>$\mu$ = permeabilidad<br>$\mathbf{J}$ = densidad de corriente = 0<br>$\mathbf{B}$ = densidad de flujo = $-\text{d}\phi_m$<br>$\mu\mathcal{L}\phi_m = 0$ |
| 2. Electrostáticos           | $\phi$ = potencial eléctrico<br>$\varepsilon$ = permeabilidad<br>$\rho$ = densidad de carga eléctrica<br>$\mathbf{D}$ = densidad de flujo<br>$\varepsilon\mathcal{L}\phi = 0$                     |
| 3. Fluidos                   | $p$ = potencial de velocidad<br>$\rho$ = densidad<br>$q$ = producción de masa<br>$\mathbf{V}$ = velocidad = $-\text{d}p$<br>$\rho\mathcal{L}p = -q$   |
|                              | $f$ = función de corriente<br>$\rho$ = densidad<br>$q$ = producción de masa = 0<br>$\mathbf{V}$ = velocidad = $\text{d}f\mathbf{u}_z$<br>$\rho\mathcal{L}f = 0$                                   |
| 4. Flujo Térmico             | $T$ = temperatura<br>$k$ = conductividad<br>$q$ = fuente de calor<br>$\mathbf{V}$ = velocidad de conducción = $-k\text{d}T$<br>$k\mathcal{L}T = -q$   |
| 5. Flujo de agua subterránea | $\phi$ = cabeza piezométrica<br>$k$ = permeabilidad<br>$q$ = recarga/bombeo<br>$\mathbf{V}$ = velocity = $-k\text{d}\phi$<br>$k\mathcal{L}\phi = -q$  |
| 6. Torsión (2D)              | $\phi$ = función de esfuerzo<br>$G$ = modulo de Young<br>$\theta$ = ángulo de torsión/longitud<br>$\tau$ = esfuerzo cortante<br>$G^{-1}\mathcal{L}\phi = -2\theta$                                |
| 7. Membranas elásticas       | $u$ = deflexion transversal<br>$T$ = tensión en la membrana<br>$F$ = carga transversalmente distribuida<br>$T\mathcal{L}u = F$  |

### 3. El *MEF* Aplicado al Electromagnetismo de baja frecuencia

El método de los elementos finitos es ampliamente aceptado en la solución de ecuaciones diferenciales parciales obtenidas del análisis en ingeniería y en física. hoy en día existen diversos programas comerciales que resuelven el método y son ampliamente utilizados por estudiantes y profesionistas, que no necesariamente conocen el principio del método, a esto se le conoce como CAE (Computer Aided Engineering).

#### 3.1. Historia del método

El concepto de elementos finitos hace su primer aparición en 1941 y fue utilizado por Hrenikoff (1941) y más tarde por McHenry (1943) en el análisis de estructuras. En consecuencia, aunque el método se puede aplicar para resolver cualquier ecuación diferencial, la terminología de la ciencia de elementos finitos está relacionada con la terminología de análisis de estructuras [9].

El método en forma apropiada (apropiada en el sentido de cómo se percibe hoy en día) hizo su aparición sólo 15 años más tarde en trabajos realizados por Turner. Estas ideas fueron captadas por Melosh en 1961 y por Zienkiewicz y Cheung en 1965, en sus trabajos de análisis de estructuras. Más tarde, el MEF fué defendido por Zienkiewicz, quien, se puede decir fue la persona que tanto lo defendía como causó que llamará la atención de la comunidad científica internacional.

En ingeniería eléctrica, el primer trabajo se realizó en 1967 por Winslow [10]. Cabe resaltar que en esa época la mayoría de los científicos usaban el método de diferencia finitas para el análisis de los dispositivos electromagnéticos [11]. En el diseño de lentes magnéticos, Winslow trató con la subdivisión de la región solución en elementos (o subdominios), funciones de prueba continuas dentro y alrededor del dominio, manejo de la no linealidad y todos aquellos conceptos que ahora se asocian con el método del elemento finito [10]. Sin embargo, debido al auge que tenía el método de diferencia finitas en esa época, decidió llamar al método "diferencias finitas para triángulos", esto tuvo un alto costo para él, ya que hoy en día no se le reconoce como el padre del método de elementos finitos en ingeniería eléctrica.

Justo como Zienkiewicz popularizó el método en ingeniería civil, fué Silvester quien, junto con sus colegas, desarrollo el método a nuevas alturas en ingeniería eléctrica y se encargo que se conociera en la comunidad de ingenieros eléctricos [12], [13]. Él y sus colaboradores aplicaron ampliamente el método al análisis de máquinas eléctricas, antenas y problemas axisimétricos. También introdujo elementos triangulares de alto orden, la idea de "ballooning" para problemas con fronteras abiertas y el concepto de matrices universales [14].

Hoy en día el método del elemento finito ha sido desarrollado en una forma sofisticada con

software rapido, poderoso y de propósito general para la solución de problemas de campo.

### 3.2. Solución a problemas con valor en la frontera

El MEF es un método numérico para obtener la solución a diferentes problemas que se encuentran en ingeniería, como son los problemas en:

- Electromagnetismo
- Estructurales
- Mecánicos
- Fluidos
- Transferencia de calor

El método combina bastantes conceptos matemáticos para resolver problemas con ecuaciones lineales o no lineales. El número de ecuaciones a resolver es muy grande y puede ser mayor a 20000, esto implica, la necesidad de herramientas computacionales para que el método sea de utilidad.

El método es muy interesante ya que puede ser aplicado fácilmente a espacios con geometría complicadas o irregulares (hay que notar que la discretización del espacio es algo similar plantear el problema de la cuadratura del círculo), los espacios pueden estar compuestos de diferentes propiedades (diferentes materiales) y contener combinaciones de las condiciones de frontera (valores impuestos o el conocimiento de la derivada respecto a la normal en la frontera del problema), es aplicable a espacio de estados y problemas dependientes en el tiempo, así como a problemas que involucren propiedades no lineales en el espacio de estudio (característica no lineal de los materiales) [15].

Los tres métodos básicos para resolver las ecuaciones son:

- Método de diferencias finitas
- Método variacional
- Método de residuales ponderados

El **método de diferencias finitas** aproxima las ecuaciones diferenciales utilizando ecuaciones en diferencias. Este método es muy utilizado en problemas en 2D con condiciones de frontera paralelas al eje coordenados, el método se complica cuando las fronteras son curvas o irregulares y es complicado generar código computacional para este método.

El **método variacional** implica que la integral de una función que genere el valor mínimo será solución de la ecuación diferencial, por ejemplo, considerando la integral

$$\Pi = \int_0^H \left[ \frac{D}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx$$

el valor mínimo para  $\Pi$  que se puede calcular con una ecuación específica  $y = h(x)$ , es la solución de la ecuación diferencial

$$D \frac{d^2 y}{dx^2} + Q = 0$$

con las condiciones de frontera  $y(A) = y_0$  y  $y(H) = y_H$ . El método variacional es la base de muchas formulaciones de elementos finitos, pero tiene algunas desventajas como: el método no es aplicable a ecuaciones diferenciales que contengan la primera derivada [15].

El **método de residuales ponderados** también involucra una integral, en este método se sustituye una solución aproximada en la ecuación diferencial. debido a que esta ecuación no es la solución del problema la solución aproximada nos genera un residual o un error  $R$ . El método de residuales ponderados implica que

$$\int_{\Omega} W R d\Omega = 0 \quad (19)$$

donde el residual  $R$  es multiplicado por una función de ponderación  $W$ , se requiere que la integral del producto sea cero. Hay muchas formas de elegir la función de ponderación entre las mas populares son:

- Método de colocación

$$W_i(x) = \delta(x - X_i)$$

- Método de Subdominio

$$W_i(x) = 1$$

- Método de Galerkin

$$W_i(x) = \phi_i(x)$$

- Método de Mínimos Cuadrados

$$\int_{\Omega} R^2 d\Omega = E_r$$

En este trabajo nos enfocaremos en el método de Galerkin donde la función de ponderación

W se elige de la misma forma que la solución aproximada  $\phi$  (o también conocidas como funciones de forma). Este método produce el mismo resultado que el método variacional y es el método mas utilizado para resolver problemas de electromagnetismo de baja frecuencia.

### 3.3. El método de Galerkin aplicado a problemas de electromagnetismo

En este reporte nos enfocaremos en el método de Galerkin para problemas de electromagnetismo en baja frecuencia. Para una introducción completa del MEF se pueden consultar los diferentes libros [9], [14], [15], [16], [17], para facilitar el entendimiento del método en este reporte se presenta un resumen de los fundamentos del MEF aplicado a la ecuación de difusión que modela los sistemas magnetodinámicos en su forma armónica.

Una de las grandes ventajas del método de Galerkin es que puede ser generalizado y esto es de gran importancia desde la parte computacional, el método se puede aplicar de la siguiente manera. Considere una ecuación de Poisson de la siguiente forma

$$\mathcal{L}x = f(x) \quad (20)$$

en una región  $\Omega$  con condiciones de frontera en la borde  $C$ . una aproximación a la solución  $\hat{x}$  en la ecuación anterior genera un residual

$$\mathcal{L}\hat{x} - f(\hat{x}) = R \quad (21)$$

el método requiere que una integral de la proyección del residual en una especifica función de ponderación sea cero sobre el dominio de interés, para este caso se elige una función de ponderación de la misma forma que el modelo de elemento finito (función de forma) ecuación 19.

considerando la ecuación de difusión en su forma armónica para los sistemas magnetodinámicos en 2D tenemos

$$\nu \mathcal{L}A = -J_0 + j\sigma\omega A \quad (22)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular a la que se encuentra girando el fasor  $A$  debido a una fuente senoidal. Ahora, se puede obtener un residual sustituyendo una aproximación de  $\hat{A}$

$$R = \nu \partial_x^2 \hat{A} + \nu \partial_y^2 \hat{A} + J_0 - j\sigma\omega \hat{A} \quad (23)$$

multiplicando el residual por una función de ponderación  $W$ , integrando en el dominio  $\Omega$  e igualando a cero,

$$- \int \int_{\Omega} W \left( \nu \partial_x^2 \hat{A} + \nu \partial_y^2 \hat{A} \right) dx dy + j\sigma\omega \int \int_{\Omega} W \hat{A} dx dy = \int \int_{\Omega} W J_0 dx dy \quad (24)$$

el primer término se puede integrar por partes de la siguiente forma

$$\int \int_{\Omega} W \nu \left( \partial_x^2 \hat{A} + \nu \partial_y^2 \hat{A} \right) dx dy = \int \int_{\Omega} \nu \left( \partial_x W \partial_x \hat{A} + \partial_y W \partial_y \hat{A} \right) dx dy - \oint_C \nu W \partial_{\hat{n}} \hat{A} dc \quad (25)$$

donde el ultimo termino está directamente relacionado con las condiciones de frontera que se presentarán mas adelante, el vector  $\hat{n}$  es el vector normal que sale del contorno  $C$ .

utilizando este resultado se realiza una discretización en el espacio seccionando la geometría con triángulos, a esto conoce como mallado de la geometría, entonces, la integral se aplica a cada uno de los triángulos y se realiza la suma de cada elemento obteniendo

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega_e} \nu^e \left( \partial_x W^e \partial_x \hat{A}^e + \partial_y W^e \partial_y \hat{A}^e \right) dx dy + \\ & j\sigma^e \omega \int \int_{\Omega_e} W^e \hat{A}^e dx dy - \nu^e \partial_{\hat{n}} \hat{A} \oint_C W^e dc = J_0 \int \int_{\Omega_e} W^e dx dy \end{aligned} \quad (26)$$

la integral de linea necesita ser evaluada sobre los elementos los cuales contienen en alguno de sus vertices condiciones de frontera del problema. Normalmente esta integral es cero para la condición de frontera  $\partial_{\hat{n}} \hat{A} = 0$  esta es la condición se conoce como condición de frontera natural.

Se consideran elementos triangulares con vertices en  $(ijk)$  distribuidos con la convención anti horario, en cada uno de los nodos se representa un potencial magnético vectorial desconocido que eventualmente sera calculado.

el potencial en un nodo debe llegar al valor de otro nodo de alguna forma, para efectos de simplificación matemática se considera que los potenciales llegan de un vértice  $i$  a un vértice  $j$  de forma polinomial, cuando este polinomio es de primer orden se dice que se utiliza elementos triangulares de primer orden.

$$A = C_1 + C_2 x + C_3 y \quad (27)$$

entonces, se puede representar una ecuación matricial que represente la distribución del potencial en un elemento triangular de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix} \quad (28)$$

ahora, de la matriz anterior se pueden determinar los valores  $C_i$  y sustituyendo en 27 tenemos

$$A = \frac{(a_i + b_i x + c_i y)A_i + (a_j + b_j x + c_j y)A_j + (a_k + b_k x + c_k y)A_k}{2\Delta} \quad (29)$$

donde  $2\Delta$  es el doble del área de cada elemento triangular que se puede calcular con el determinante de la matriz de coordenadas globales 28, y

$$\begin{aligned} a_i &= x_i y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_i - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned}$$

los coeficientes que multiplican al potencial desconocido son llamados *funciones de forma* y se representan de la siguiente forma

$$A = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) A_i$$

con  $m$  igual al numero de nodos en cada elemento. Las funciones de forma  $N_i$  tienen propiedades interesantes como la suma de las funciones en cualquier parte del triángulo es igual a uno y  $N_i = 1$  en el nodo  $i$  y cero en los otros nodos en el libro [2] se puede observar una representación gráfica de estas propiedades para elementos en una dimensión.

Escribiendo de forma matricial el potencial en elemento en términos de las funciones de forma y del los potenciales en cada nodo

$$A = \{N_i^e, N_j^e, N_k^e\} \{A_i^e, A_j^e, A_k^e\}^T$$

Especialmente en el método de Galerkin se elige la función de ponderación igual que las funciones de forma  $W = \{N_i^e, N_j^e, N_k^e\}^T$ , entonces, para el calculo de la integral obtenemos las derivadas de  $W$  y  $A$  con respecto a las coordenadas globales

$$\begin{aligned} \partial_x A &= (2\Delta)^{-1} \{b_i^e, b_j^e, b_k^e\} \{A_i, A_j, A_k\}^T \\ \partial_y A &= (2\Delta)^{-1} \{c_i^e, c_j^e, c_k^e\} \{A_i, A_j, A_k\}^T \\ \partial_x W^e &= (2\Delta)^{-1} \{b_i^e, b_j^e, b_k^e\}^T \\ \partial_y W^e &= (2\Delta)^{-1} \{c_i^e, c_j^e, c_k^e\}^T \end{aligned}$$

con estos últimos resultados se puede ver que las derivadas obtenidas son constantes y el primer término de la integral 26 se puede calcular de manera muy sencilla (esto no pasaria con elementos de orden superior)

$$\nu^e \int \int_{\Omega_e} \left( \partial_x W^e \partial_x \hat{A}^e + \partial_y W^e \partial_y \hat{A}^e \right) dxdy = \nu^e (4\Delta)^{-1} [S] \{A_i^e, A_j^e, A_k^e\}^T$$

donde

$$[S] = \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ sim & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ sim & sim & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix}$$

la matriz  $[S]$  es conocida como la matriz de rigidez. La segunda integral en la ecuación 26

$$\begin{aligned} j\sigma^e \omega \int \int_{\Omega_e} W^e \hat{A}^e dxdy &= j\sigma^e \omega \int \int_{\Omega_e} \{N_i^e, N_j^e, N_k^e\}^T \{N_i^e, N_j^e, N_k^e\} \{A_i^e, A_j^e, A_k^e\}^T dxdy \\ j\sigma^e \omega \int \int_{\Omega_e} W^e \hat{A}^e dxdy &= \frac{j\sigma^e \omega \Delta}{12} [T] \{A_i^e, A_j^e, A_k^e\}^T \end{aligned}$$

donde

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ sim & 2 & 1 \\ sim & sim & 2 \end{bmatrix}$$

la matriz  $[T]$  se conoce como matriz de masa.

Continuando con el término de la mano derecha de la integral 26 se conoce como función de fuerza o vector de fuerza  $\{F\}$

$$\{F\} = J_0 \int \int_{\Omega_e} \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2\Delta} dxdy = J_0 \frac{(a_i + b_i \bar{x} + c_i \bar{y})}{2\Delta}$$

donde  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son las coordenadas del centroide del triángulo  $\bar{x} = (x_i + x_j + x_k)/3$  y  $\bar{y} = (y_i + y_j + y_k)/3$ . Considerando los valores de  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  y asumiendo que  $J_0$  es constante sobre todo el triángulo, tenemos

$$\{F\} = J_0 \int \int_{\Omega_e} W^e dxdy = \frac{J_0^e \Delta}{3} \{1, 1, 1\}^T$$

finalmente podemos expresar un sistema de ecuaciones algebraicas para la ecuación armónica de difusión con condiciones de frontera homogeneas Neuman.

$$\nu^e(4\Delta)^{-1}[S]\{A_i^e, A_j^e, A_k^e\}^T + \frac{j\sigma^e\omega\Delta}{12}[T]\{A_i^e, A_j^e, A_k^e\}^T = \{F\} \quad (30)$$

observando esta ultima ecuación podemos ver que la estructura es similar a las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico, de aquí el nombre de matriz de inercia y de masa, es importante resaltar que la ecuación de difusión armónica considera la fuente como una entrada de forma snoidal en estado permanente.

### 3.3.1. Ensamble

Una ves que se estableció el sistema matricial para cada elemento es necesario encontrar una forma sistemática para representar el sistema de forma global. Este proceso no es complicado, en cada matriz tenemos renglones y columnas correspondientes a los nodos en los elementos. En el proceso de ensamble se adjuntan todos los elementos matriciales formando una matriz global. Para un problema con  $m$  nodos tendremos una matriz global de  $m \times m$ . cuando se adjunta cada elemento  $ij$  en la matriz de rigidez y de masa correspondiente para cada termino  $ij$  la matriz global resultante es simétrica y singular.

### 3.4. Condiciones de Frontera

Hay diferentes condiciones de frontera para los problemas de dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia, en esta sección se discutirán dos tipos de condiciones de frontera para plantear la solución de los problemas condiciones tipo Dirchlet y Newman. Las condiciones Dirichlet son aquellas donde el potencial se encuentra impuesto o definido en el contorno  $C$ , hay que recordar que el contorno  $C$  es sobre el domino  $\Omega$  del problema y están relacionados con la integral cerrada

$$\oint_C \nu W \partial_n \hat{A} dc = 0$$

Cuando se especifica la derivada del potencial respecto a la normal del contorno  $C$ , esto es  $\partial_n A = \varrho$  se conoce como condición de frontera Newman y si  $\varrho = 0$  también se le llama condición homogénea o condición de frontera natural. Para obtener unicidad de la solución al problema, es necesario establecer las condiciones de frontera y se debe de establecer el potencial en al menos un punto del contorno  $C$  (condición Dirichlet).

## 4. Observaciones para el problema de acoplamiento

La esencia de este trabajo doctoral es desarrollar una metodología para simular circuitos electrónicos de potencia con capacidades de conexión a modelos de campo electromagnético donde se puedan insertar sistemas de control y alimentaciones mecánicas. Para lograr este objetivo es necesario acoplar las ecuaciones de los modelos electromagnéticos a las ecuaciones

dinámicas de los elementos de electrónica de potencia. Con lo ya repostado en este escrito, en esta sección se mencionan algunas observaciones que se tienen que atender para cumplir el objetivo del trabajo.

- **Observación 1:** los modelos electromagnéticos son excitados a través de diferencias de potencial eléctrico para los casos electrostáticos como se muestra en la figura 1 y a través de densidades de corriente  $J_0$  para el caso de modelos magnéticos 2, la corriente  $J_0$  es generada por la corriente  $I$  que circula en un devanado y a su vez esta corriente es generada por un circuito eléctrico el cual puede contener resistores, capacitores, inductores o elementos de electrónica de potencia (ver figura 3) como diodos, tiristores, triacs, IGBT's, MOSFET's etc.

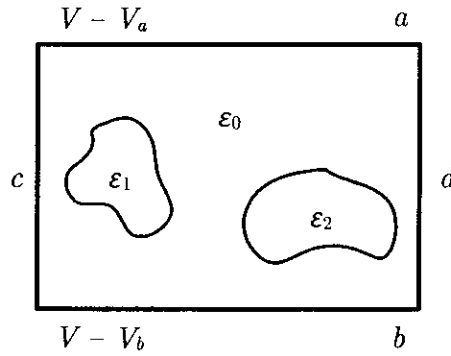


Figura 1: Problemas Electrostáticos

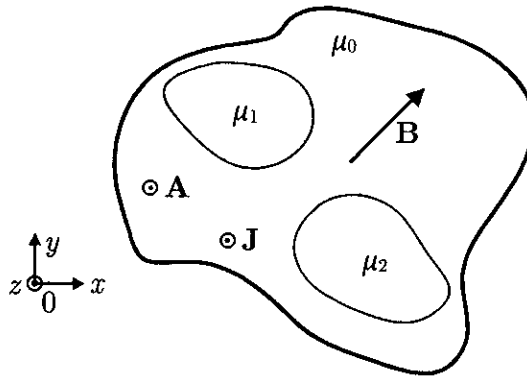


Figura 2: Problemas Magnéticos

- **Observación 2:** La ecuación de difusión en su forma armónica considera entradas de forma senoidal permanente lo que implica despreciar la parte transitoria, esta simplificación ya no se puede aplicar una vez que se incorporen los modelos de circuitos eléctricos y electrónicos, por lo cual, es necesario plantear las ecuaciones para el MEF considerando las derivadas respecto al tiempo, esto implica una discretización en el tiempo para la solución a ecuaciones diferenciales temporales.
- **Observación 3:** El intercambio de energía eléctrica a mecánica o viceversa es el trabajo principal de los dispositivos electromecánicos, es necesario considerar las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica de los sistemas, hay que recordar que en los modelos magnéticos se genera energía cinética que a su vez se convertirá en fuerza (Fuerza de Lorentz o método de la energía o coenergía), estas fuerzas se encuentran aplicadas a los sistemas en estudio generando cambios en las configuraciones del mismo por eso es importante considerar en el *MEF* el acoplamiento con las partes mecánicas 3, es importante mencionar que los modelos mecánicos también pueden ser representados por circuitos eléctricos.

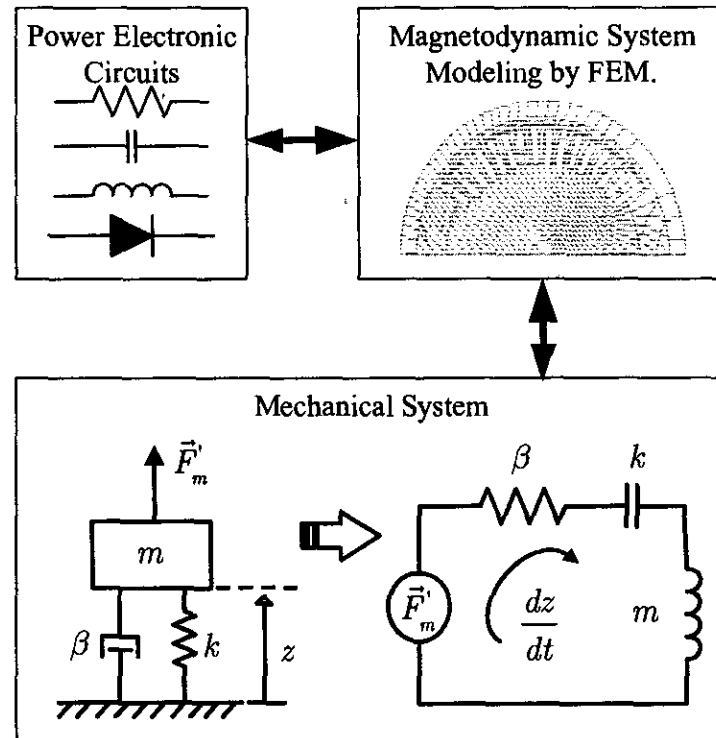


Figura 3: Problema de acoplamiento campo-circuito y alimentaciones mecánicas con el MEF

Estas son algunas de las referencias para atacar el problema de acoplamiento [2], [18], [19],

[20], [21], [22][20], [21] y [23].

## 5. Problema base a Resolver

Actualmente existen trabajos publicados acerca del modelado y de las aplicaciones de los circuitos electrónicos de potencia como en libro de Sira et al. [24] donde se desarrollan modelos dinámicos de varios de los convertidores de potencia y se presentan diversas técnicas de control. El libro de Vlach et al. [25] donde se estudian metodologías para sistematizar el análisis de circuitos eléctricos.

Para el siguiente periodo además de las actividades marcadas en el cronograma se estará trabajando con el siguiente modelo

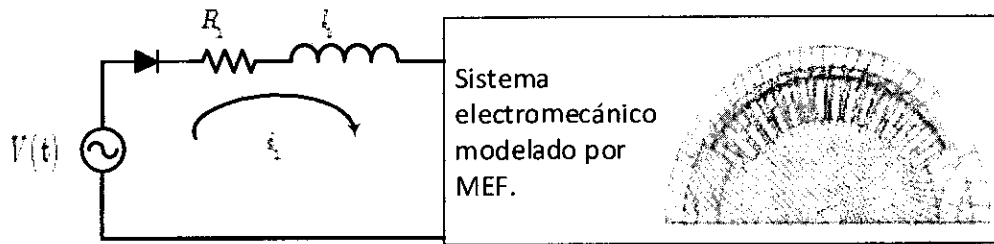


Figura 4: Problemas base a resolver

Este modelo representa un sistema electromecánico modelado por *MEF* acoplado a un circuito externo, el circuito externo contiene una fuente de voltaje senoidal con solo un diodo de potencia, un resistor y un inductor. El objetivo es plantear la ecuación de difusión con derivadas temporales y acoplar el circuito eléctrico a través de la densidad de corriente  $J_0$ . Resolviendo para un diodo de potencia se buscara extender el resultado con otros dispositivos de electrónica de potencia.

## 6. Plan de trabajo para el semestre 2016 – 2

En el cronograma de actividades presentado en el protocolo de investigación se tienen las siguientes tareas:

- **Primer y segundo semestre:** Revisión en la literatura de los temas bases como el electromagnetismo de baja frecuencia, electrónica de potencia, el MEF aplicado al análisis de dispositivos electromagnéticos en 2D y el método MNA para la creación de ecuaciones campo-circuito con acoplamiento fuerte.

- **Segundo y tercer semestre:** Estudio de los modelos matemáticos de los dispositivos de electrónica de potencia y resolución con nuevas técnicas del problema de acoplamiento fuerte para la simulación de los dispositivos a través de métodos sistemáticos basados en el método MNA.

## Referencias

- [1] C. Alexander, C. K. Alexander, and M. N. Sadiku, *Fundamentals of electric circuits*. Urban Media Comics, 2006.
- [2] J. P. A. Bastos and N. Sadowski, *Electromagnetic modeling by finite element methods*. CRC press, 2003.
- [3] J. Orloff and L. Swanson, "An asymmetric electrostatic lens for field-emission microprobe applications," *Journal of Applied Physics*, vol. 50, no. 4, pp. 2494–2501, 1979.
- [4] S. Burger, J. Pomplun, and F. Schmidt, "Finite element methods for computational nano-optics," in *Encyclopedia of Nanotechnology*, pp. 837–843, Springer, 2012.
- [5] X. Zhu and E. Munro, "A computer program for electron gun design using second-order finite elements," *Journal of Vacuum Science & Technology B*, vol. 7, no. 6, pp. 1862–1869, 1989.
- [6] K. H. Lee, S. G. Hong, M. K. Baek, H. S. Choi, Y. S. Kim, and I. H. Park, "Alleviation of electric field intensity in high-voltage system by topology and shape optimization of dielectric material using continuum design sensitivity and level set method," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 51, no. 3, p. 9400404, 2015.
- [7] J. Guzman, F. Gonzalez-Montanez, R. Escarela-Perez, J. C. Olivares-Galvan, and V. Jimenez-Mondragon, "Numerical modeling of the thomson ring in stationary levitation using fem-electrical network and newton-raphson," *Ingeniería, investigación y tecnología*, vol. 16, no. 3, pp. 431–439, 2015.
- [8] S. Jayakumaran and S. R. H. Hoole, "Perturbations in the adaptive refinement of boundary elements," *Journal of Applied Physics*, vol. 63, no. 8, pp. 3013–3015, 1988.
- [9] S. R. H. Hoole, "Computer aided analysis and design of electromagnetic devices," 1989.
- [10] A. M. Winslow, "Numerical solution of the quasilinear poisson equation in a nonuniform triangle mesh," *Journal of computational physics*, vol. 1, no. 2, pp. 149–172, 1966.
- [11] F. Trutt, E. Erdélyi, R. Jackson, *et al.*, "The non-linear potential equation and its numerical solution for highly saturated electrical machines," *IEEE Transactions on Aerospace*, vol. 1, no. 2, pp. 430–440, 1963.

- [12] P. Silvester and M. V. Chari, "Finite element solution of saturable magnetic field problems," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, no. 7, pp. 1642–1651, 1970.
- [13] M. Chari, S. Minnich, Z. Csendes, J. Berkery, and S. Tandon, "Load characteristics of synchronous generators by the finite-element method," *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, no. 1, pp. 1–13, 1981.
- [14] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*. Cambridge university press, 1996.
- [15] L. J. Segerlind. "Applied finite element methods," 1984.
- [16] D. S. Burnett, *Finite element analysis: from concepts to applications*. Prentice Hall, 1987.
- [17] J. P. A. Bastos and N. Sadowski, *Electromagnetic modeling by finite element methods*. CRC press, 2003.
- [18] S. Salon and M. Chari, *Numerical methods in electromagnetism*. Academic press, 1999.
- [19] E. Melgoza, R. Escarela-Pérez, and M. Arjona, "Field-circuit coupling using existing network transients codes," *IEEE transactions on magnetics*, vol. 42, no. 4, pp. 1055–1058, 2006.
- [20] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Systematic coupling of multiple magnetic field systems and circuits using finite element and modified nodal analyses," *Magnetism, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 207–213, Jan 2011.
- [21] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Multi-slice modeling in circuit-field coupled systems using finite-element and modified nodal analyses," *Magnetism, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 67–74, Jan 2010.
- [22] S. Ho, S. Niu, and W. Fu, "An equivalent parameter extraction method of transient electric circuit and magnetic field coupled problems based on sensitivity computation of system equations," *Magnetism, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 2068–2075, Aug 2011.
- [23] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Coupling circuit systems and finite element models: A 2-d time-harmonic modified nodal analysis framework," *Magnetism, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 707–715, Feb 2009.
- [24] H. Sira-Ramírez and R. Silva-Ortigoza, *Control design techniques in power electronics devices*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [25] J. Vlach and K. Singhal, *Computer methods for circuit analysis and design*. Springer Science & Business Media, 1983.



## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO ACADÉMICO DE DOCTORADO

### Datos del (de la) alumno(a)

|                   |                                    |                 |           |
|-------------------|------------------------------------|-----------------|-----------|
| Nombre:           | GONZALEZ MONTANEZ FELIPE DE JESUS  | Folio:          | 123936249 |
| No. de cuenta:    | 516009876                          | Año - Semestre: | 2016 - 1  |
| Plan de estudios: | DOCTORADO EN INGENIERIA ELECTRICA  | Clave Plan:     | 11 - 5103 |
| Programa:         | PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERIA | Clave Programa: | 125       |

### Proyecto de investigación:

SIMULACION DE DISPOSITIVOS DE ELECTRONICA DE POTENCIA ACOPLADOS A SISTEMAS ELECTROMECHANICOS MODELADOS POR ELEMENTOS FINITOS

### Opinión del Comité Tutor

| Nombre del Profesor o Investigador                        | Consideraciones de evaluación   |
|---|---|
| DOCTOR RAFAEL ESCARELA PEREZ<br>(Tutor)                   | Recomiendo que el alumno <b>SI CUMPLIO</b> con las actividades académicas encomendadas para este semestre |
| DR. ENRIQUE MELGOZA YAZQUEZ<br>(Miembro del Comité Tutor) | Recomiendo que el alumno <b>SI CUMPLIO</b> con las actividades académicas encomendadas para este semestre |
| DR. FREDERIC TRILLAUD<br>(Miembro del Comité Tutor)       | Recomiendo que el alumno <b>SI CUMPLIO</b> con las actividades académicas encomendadas para este semestre |

CON BASE EN EL DICTAMEN EMITIDO POR EL COMITÉ TUTOR EN SU SESIÓN DE EVALUACIÓN DEL 16/01/2016 EL COMITÉ ACADÉMICO ARROBÓ EL INFORME EN LA SESIÓN CELEBRADA EL DÍA 16/01/2016 POR LO QUE SE CONSIDERA QUE EL (LA) ALUMNO(A) **SI CUMPLIO**

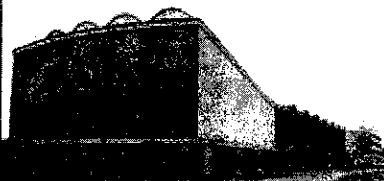


DOCTOR GABRIEL ASCANIO GASCA  
Coordinador del Programa





UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
SECRETARÍA GENERAL  
DIRECCIÓN GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
SUBDIRECCIÓN DE ASUNTOS ESCOLARES DEL POSGRADO



**COMPROBANTE DE REGISTRO ACADÉMICO**  
Registro Autorizado

Alumno de Reingreso

Comprobante : 397679

**PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERÍA**



| No.de cuenta  | Entidad | Plan-Or | ORIENTACIÓN                     |
|---|---------|---------|---------------------------------|
| 516009876   | 11      | 5103-4  | SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA |
| El alumno GONZALEZ MONTAÑEZ FELIPE DE JESUS ha solicitado ante este Programa de Posgrado, el registro en el Plan de Estudios DOCTORADO EN INGENIERIA ELECTRICA con la orientación 4, para el año y semestre 2016-2, de tiempo completo. |         |         |                                 |

**USTED PERTENECE AL AREA DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS E INGENIERIA**

| ACTIVIDAD ACADÉMICA          |  |
|------------------------------|--|
| Tipo                         | Nombre del profesor  |
| Miembro del Comité Tutor     | DR. MELGOZA VAZQUEZ ENRIQUE  |
| Miembro del Comité Tutor     | DR. TRILLAUD PIGHI FREDERIC  |
| Tutor                        | DR. ESCARELA PEREZ RAFAEL  |
| Proyecto                     | SIMULACION DE DISPOSITIVOS DE ELECTRONICA DE POTENCIA ACOPLADOS A SISTEMAS ELECTROMECHANICOS MODELADOS POR ELEMENTOS FINITOS |
| Otras Actividades Académicas | No tengo otras actividades   |

Si desea cambiar de Tutores o Proyecto de Investigación por favor acuda a las oficinas de Servicios Escolares de su Programa de Estudios.

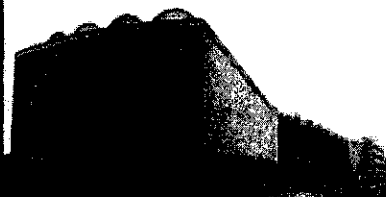
Esta información se reflejará en el Acta de Evaluación.

Ciudad Universitaria, D.F. a 22 de Febrero de 2016

Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso  
Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso  
Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso  
Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso  
Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso

Comprobante de Registro Autorizado





Alumno de Reingreso

**COMPROBANTE DE REGISTRO ACADÉMICO**

Registro Autorizado

Comprobante : 397679

**PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERÍA**



| No.de cuenta  | Entidad | Plan-Or | ORIENTACIÓN                     |
|---|---------|---------|---------------------------------|
| 516009876   | 11      | 5103-4  | SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA |
| El alumno GONZALEZ MONTAÑEZ FELIPE DE JESUS ha solicitado ante este Programa de Posgrado, el registro en el Plan de Estudios DOCTORADO EN INGENIERIA ELECTRICA con la orientación 4, para el año y semestre 2016-2, de tiempo completo. |         |         |                                 |

**OBSERVACIONES IMPORTANTES**