

23 de Febrero de 2016

Consejo Divisional de Ciencias Básicas e Ingeniería

Presente

Atendiendo a lo dispuesto en el Artículo 39 del Reglamento de Becas del Personal Académico, por este conducto me permito entregar el informe de actividades realizadas en el quinto semestre (2016-1) de los estudios de doctorado en Ingeniería Eléctrica, que estoy realizando en la Universidad Nacional Autónoma de México. Además del informe se anexa el acta de evaluación semestral donde se observa que se acreditó el quinto semestre del doctorado y el comprobante de inscripción al sexto semestre (2016-2).

Atentamente

[Redacted signature area]

M. en I. Víctor Manuel Jiménez Mondragón

Profesor Asistente C

Departamento de Energía





ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO ACADÉMICO DE DOCTORADO

Datos del (de la) alumno(a)

Nombre:	JIMENEZ MONDRAGON VICTOR MANUEL	Folio:	123934790
No. de cuenta:	511006265	Año - Semestre:	2016 - 1
Plan de estudios:	DOCTORADO EN INGENIERIA ELECTRICA	Clave Plan:	11 - 5103
Programa:	PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERIA	Clave Programa:	125

Proyecto de investigación:

Análisis de dispositivos electromagnéticos en baja frecuencia mediante el método del elemento finito en sistemas eléctricos cartesianos 2D y axi-simétricos

Opinión del Comité Tutor

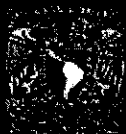
Nombre del Profesor o Investigador	Consideraciones de evaluación
DOCTOR RAFAEL ESCARELA PEREZ (Tutor)	Recomiendo que el alumno SÍ CUMPLIÓ con las actividades académicas encomendadas para este semestre
DOCTOR CESAR ANGELES CAMACHO (Miembro del Comité Tutor)	Recomiendo que el alumno SÍ CUMPLIÓ con las actividades académicas encomendadas para este semestre
DR. ENRIQUE MELGOZA VAZQUEZ (Miembro del Comité Tutor)	Recomiendo que el alumno SÍ CUMPLIÓ con las actividades académicas encomendadas para este semestre
DR. FREDERIC TRILLAUD (Miembro del Comité Tutor)	Recomiendo que el alumno SÍ CUMPLIÓ con las actividades académicas encomendadas para este semestre

CON BASE EN EL DICTAMEN EMITIDO POR EL COMITÉ TUTOR EN SU SESIÓN DE EVALUACIÓN DEL 16/01/2016 EL COMITÉ ACADÉMICO APROBÓ EL INFORME EN LA SESIÓN CELEBRADA EL DÍA 16/01/2016 POR LO QUE SE CONSIDERA QUE EL (LA) ALUMNO(A) **SÍ CUMPLIÓ**



DOCTOR GABRIEL ASCANIO GASCA
Coordinador del Programa





Alumno de Reingreso

COMPROBANTE DE REGISTRO ACADÉMICO
Registro Autorizado

Comprobante : 397305

PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERÍA

No.de cuenta	Entidad	Plan-Or	ORIENTACIÓN
511006265	11	5103-4	SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA
El alumno JIMENEZ MONDRAGON VICTOR MANUEL ha solicitado ante este Programa de Posgrado, el registro en el Plan de Estudios DOCTORADO EN INGENIERIA ELECTRICA con la orientación 4, para el año y semestre 2016-2, de tiempo completo.			

USTED PERTENECE AL AREA DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS E INGENIERIA

ACTIVIDAD ACADÉMICA

Tipo	Nombre del profesor
Miembro del Comité Tutor	DR. ANGELES CAMACHO CESAR
Miembro del Comité Tutor	DR. MELGOZA VAZQUEZ ENRIQUE
Miembro del Comité Tutor	DR. TRILLAUD PIGHI FREDERIC
Tutor	DR. ESCARELA PEREZ RAFAEL
Proyecto	Análisis de dispositivos electromagnéticos en baja frecuencia mediante el método del elemento finito en sistemas eléctricos cartesianos 2D y axi-simétricos
Otras Actividades Académicas	Plantear técnicas de acoplamiento campo-circuito para la simulación simultánea de varios dispositivos electromagnéticos en baja frecuencia

Si desea cambiar de Tutores o Proyecto de Investigación por favor acuda a las oficinas de Servicios Escolares de su Programa de Estudios.

Esta información se reflejará en el Acta de Evaluación.

Ciudad Universitaria, D.F. a 22 de Febrero de 2016

Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso
Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso
Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso
Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso
Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso Reingreso

Comprobante de Registro Autorizado



COMPROBANTE DE REGISTRO ACADÉMICO

Alumno de Reingreso

Registro Autorizado

Comprobante : 397305

PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERÍA

No.de cuenta	Entidad	Plan	ORIENTACIÓN
511006265	11	5103-4	SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA
El alumno JIMENEZ MONDRAGON VICTOR MANUEL ha solicitado ante este Programa de Posgrado, el registro en el Plan de Estudios DOCTORADO EN INGENIERIA ELECTRICA con la orientación 4, para el año y semestre 2016-2, de tiempo completo.			

OBSERVACIONES IMPORTANTES

Análisis de dispositivos electromagnéticos en baja frecuencia
mediante el método del elemento finito en sistemas eléctricos
cartesianos 2D y axisimétricos

Informe de actividades semestre 2016-1

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

Víctor Manuel Jiménez Mondragón

Asesor: Dr. Rafael Escarela Pérez

22 de febrero de 2016

1. Resumen de actividades

Se realizó una revisión de la literatura de los métodos de acoplamiento fuerte en el dominio del tiempo, para entender y estar en posibilidad de aplicar las diferentes técnicas. La búsqueda de información se realizó en artículos de investigación y libros especializados en el método.

Además se trabajó en el artículo de investigación que presenta la solución al problema de acoplamiento fuerte de n sistemas de campo cuasi-3D en el dominio de la frecuencia. El trabajo muestra los resultados obtenidos hasta ahora en el trabajo de doctorado y ya se envió a la revista *IEEE Transactions on Magnetics* para su evaluación. El artículo lleva por título: Nonlinear Time-Harmonic Analysis of Multiple Magnetic Field Systems: Cartesian, Axisymmetric and Coupled Circuits.

2. Introducción

El modelado de dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia mediante el Método de Elementos Finitos, se usa comúnmente tanto en la academia como en la industria, para diseñar, optimizar y analizar posibles problemas de operación en estos sistemas [1, 2, 3, 4]. Actualmente se dispone de software tanto comercial como libre que permite resolver problemas en dos o tres dimensiones, tanto estáticos como en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo. Además se dispone de métodos especializados para calcular variables eléctricas y electromagnéticas (par electromagnético, velocidad y voltaje inducido). El desarrollo de métodos sofisticados ha permitido la interconexión de un modelo de campo electromagnético con circuitos eléctricos.

Una revisión de los trabajos publicados en los 80's en el problema de acoplamiento circuito-campo se presenta en [5]. Gran parte de este trabajo fue desarrollado para resolver problemas específicos y métodos sistemáticos fueron implementados en los 90's, basados en dos aproximaciones para acoplar análisis de elementos finitos con circuitos: Acoplamiento fuerte [6, 7, 8] y acoplamiento débil (solución escalonada) [9, 10, 11, 12].

En el método de acoplamiento débil los modelos de campo y circuitos se resuelven como sistemas separados, los cuales se comunican por medio de coeficientes de acoplamiento. El método de acoplamiento débil es atractivo cuando las constantes de tiempo en el dominio de campo y dominio de los circuitos difieren de forma apreciable [13]. En estos casos, es factible la interacción de simuladores de circuitos y software de elementos finitos, evitando la necesidad de programación de código numérico. De esta forma los desarrolladores de software de elementos finitos, no tienen que ser expertos en la programación de código para resolver problemas de circuitos eléctricos.

El método de acoplamiento fuerte resuelve de forma simultánea las ecuaciones del modelo de parámetros concentrados y las del sistema magnético, donde generalmente se pueden encontrar soluciones de mayor precisión y rapidez. Sin embargo, se tienen que implementar los códigos que resuelvan los circuitos, para solucionar el problema acoplado.

Los primeros intentos de acoplar mediante un acoplamiento fuerte sistemas de campo y circuitos usando el método de mallas se puede encontrar en [14, 15]. El análisis más completo y conciso del problema acoplado, se presenta en los trabajos de Salon [16, 17], que incluyen el acoplamiento de las ecuaciones de campo, circuito y movimiento. Considera conductores sólidos o filamentosarios (conexiones en serie o paralelo) y la no linealidad de los materiales magnéticos. La principal característica del método

propuesto es que sólo se necesita como entrada el voltaje aplicado en las terminales del dispositivo y las corrientes son incógnitas del sistema. Además calcula la fuerza magnética sobre cuerpos en movimiento con el método del trabajo virtual [18].

En [19] se presenta una formulación del problema acoplado circuito-campo con la que se pueden incorporar tanto conductores sólidos como filamentosarios con conexiones arbitrarias, usando el método de mallas o el método nodal. Esta técnica incorpora un número limitado de elementos de circuito (resistencia, capacitancia, inductancia y fuentes).

El desarrollo de técnicas de acoplamiento más avanzadas se ha basado ampliamente en teoría de topología [20, 21]. Los métodos topológicos utilizan una representación simbólica de los elementos constituidos de un sistema mediante esquemas gráficos, que lleva a un sistema consistente de ecuaciones. La aproximación en variables de estado [22] se puede combinar con teoría de topología, para obtener una forma canónica de las ecuaciones de circuito, al representar la red como un conjunto de nodos, ramas y enlaces. Este método alcanza la generalización en la obtención de las ecuaciones circuito-campo, con una apropiada incorporación de conductores sólidos y filamentosarios. Esta aproximación se puede aplicar fácilmente en la simulación de problemas de control en máquinas eléctricas [23].

El problema de acoplamiento circuito-campo se puede formular mediante el método de Análisis Nodal Modificado ANM [24], el cual a su vez se basa en el método nodal. En [25] se presenta una formulación en el dominio del tiempo basada en el Método de ANM considerando sólo conductores filamentosarios y elementos de circuito básicos. El trabajo reciente presentado en [7], resuelve el problema acoplado usando conceptos del método de ANM. Sin embargo, no se utiliza el concepto base de bloques de construcción del método nodal para obtener una formulación compacta y sistemática. La discretización en el tiempo se realiza con el método de Euler hacia atrás y se linealiza el sistema con el método de Newton-Raphson.

En [6, 26] se muestra que el MEF-ANM es un método de acoplamiento poderoso para el análisis de dispositivos electromagnéticos. Se explota el potencial del método de ANM para resolver el problema circuito-campo mediante un acoplamiento fuerte, al considerar más elementos no naturales: Transformadores, auto-transformadores, fuentes dependientes, elementos magnéticamente acoplados (cada elemento posee su bloque de construcción en el método de ANM). Además se muestra que los conductores sólidos y filamentosarios se pueden tratar de la misma manera, al introducir el concepto de vector de devanado, cuando se acoplan las ecuaciones de campo con las de circuito. La principal característica de este método, en comparación con el que se basa en la teoría de topología de redes, es la incorporación fácil y sistemática de elementos de circuito al retener el concepto de bloque de construcción del método de análisis nodal. Esta técnica se implementó para resolver problemas no lineales de elementos finitos en el dominio de la frecuencia.

3. Análisis transitorio de dispositivos electromagnéticos

En esta sección se presentan las ecuaciones de campo y circuitos que gobiernan el comportamiento de problemas cuasi-3D (cartesianos y axisimétricos) en el dominio del tiempo. El sistema circuito-campo se discretiza en el espacio a través del Método de Elemento Finito utilizando la formulación de Galerkin [27]. La discretización en el tiempo del sistema se realiza con el método implícito de Euler hacia atrás y la linealización del problema se establece con el método de Newton-Raphson. Al final, se obtiene

un sistema discreto de ecuaciones algebraicas no lineales donde las incógnitas pueden ser: Potencial magnético vectorial, voltajes nodales u otras variables de interés.

En general, el problema transitorio de baja frecuencia se describe por el sistema discreto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$[D] \{\dot{x}\} + [S] \{x\} + \{f\} = 0 \quad (1)$$

donde $\dot{x} = \partial x / \partial t$. La matriz de amortiguamiento $[D]$ y la matriz de rigidez $[S]$ pueden ser dependientes de las incógnitas x y del tiempo. $\{f\}$ es un vector de excitación función del tiempo, por ejemplo densidades de corriente conocidas o fuentes de voltaje independientes. En secciones posteriores se obtendrá el sistema discreto representativo de problemas de campo (cartesiano y axisimétrico), de elementos simples de circuito (resistencia, inductancia, capacitancia y fuente independiente de voltaje) y de las ecuaciones de acoplamiento circuito campo para conductores sólidos y filamentosos.

3.1. Ecuación de difusión no lineal

En general, el comportamiento de dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia se describe completamente mediante la solución de las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, es conveniente realizar algunas suposiciones para simplificar la solución del problema de valor a la frontera:

1. El dispositivo electromagnético que se analiza puede considerarse con una aproximación *cuasi-estacionaria*. Es decir la corriente de desplazamiento asociada a la ley de Ampere, puede omitirse cuando se opera a baja frecuencia.
2. La reluctividad ν del material magnético es dependiente del campo magnético. Con ello se considera la saturación magnética del material, pero se ignora el fenómeno de histéresis.
3. Se asume un material magnético isotrópico en el modelo cuasi-3D del dispositivo electromagnético que satisface la igualdad $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.
4. La conductividad eléctrica σ del cobre es constante.
5. Se asume que la densidad de corriente en conductores filamentosos es uniforme sobre la sección transversal del conductor.
6. Se asume un modelo en dos dimensiones del sistema electromagnético, en el cual se pueden incorporar los efectos tridimensionales con valores de resistencias e inductancias en las ecuaciones de circuitos.

Bajo las suposiciones anteriores, las ecuaciones de campo electromagnético para problemas cuasi-3D se obtienen de forma relativamente sencilla.

3.1.1. Formulación cartesiana

El análisis 2D cartesiano se basa en la suposición de que la estructura no presenta variación geométrica en la dirección perpendicular al plano de estudio y que los campos son constantes en esa dirección. La manipulación de las ecuaciones de Maxwell, lleva a la siguiente ecuación de difusión no lineal para resolver el problema cartesiano en el dominio del tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_{fz} - J_{sz} = -J_{sf} + \sigma \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{v_s}{l_{eff}} \right) \quad (2)$$

donde A_z es la única componente existente del potencial magnético vectorial. J_{fz} , J_{sz} y v_s son la densidad de corriente en regiones con conductores filamentosos, la densidad de corriente no uniforme en regiones con conductores sólidos y la diferencia de potencial en terminales de conductores sólidos, respectivamente. σ y l_{eff} son la conductividad y la longitud axial del modelo, respectivamente. ν es la reluctividad del material magnético que puede ser función del campo magnético, cuando se considera la no linealidad del material.

Los conductores filamentosos se consideran demasiado delgados tal que se desprecian las corrientes de remolino. De esta manera, en el dominio Ω_f de sección transversal Λ_f , se tiene una distribución uniforme de N_f conductores filamentosos conectados en serie por los que circula una corriente I_f . Entonces, la densidad de corriente uniforme sobre la sección transversal se puede escribir como:

$$J_{fz} = \frac{N_f i_f}{\Lambda_f} \quad (3)$$

La sustitución de la ecuación (3) en (2) lleva al problema de valor a la frontera en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -\frac{N_f i_f}{\Lambda_f} + \sigma \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{v_s}{l_{eff}} \right) \quad (4)$$

El sistema anterior considera tres dominios de interés: Regiones no conductoras, regiones con conductores sólidos y regiones con conductores filamentosos.

■ Discretización en el espacio

Las ecuaciones de elemento finito en los diferentes subdominios se obtienen mediante la aproximación de Galerkin [27]. Este método se basa en la minimización de una expresión integral y es un caso especial del método de residuales ponderados. La expresión integral es:

$$\int W_p R_e dS = 0 \quad (5)$$

donde R_e es el residual, que se obtiene al igualar a cero la ecuación diferencial parcial (4). Si la solución prueba es la solución exacta, entonces $R_e = 0$. El método de residuales ponderados requiere que la proyección del residual sobre una función ponderada W_p , sea cero sobre el dominio de interés. La elección de las funciones ponderadas determina el tipo de método residual ponderado. Si se elige la función ponderada igual que la función forma, entonces se tiene el método de Galerkin.

Las funciones de forma ζ_i , se utilizan para aproximar el potencial magnético vectorial en un elemento con una función polinomial de la forma:

$$A_z = \sum a_i(t)\zeta_i(x, y) \quad (6)$$

El sistema (4) se puede expresar numéricamente como:

$$-[S]\{a\} - \sum_s [D_s]\{\dot{a}\} + \sum_f [S_f]i_f + \sum_s [S_s]v_s = 0 \quad (7)$$

donde $\dot{a} = \partial a / \partial t$. Las matrices y vectores en (7) se definen explícitamente por las siguientes expresiones:

Matriz de rigidez:

$$[S]_{n \times n} = \sum_e \iint_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta^T}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \zeta^T}{\partial y} \right) dx dy \quad (8)$$

Matriz de conductividad:

$$[D_s]_{n \times n} = \sum_e \iint_{\Omega_e} \sigma \zeta \zeta^T dx dy \quad (9)$$

Vector de devanado en conductores filamentosarios:

$$[S_f]_n = \frac{N_f}{\Lambda_f} \sum_{e_f} \iint_{\Omega_{e_f}} \zeta dx dy \quad (10)$$

Vector fuente en conductores sólidos:

$$[S_s]_n = \frac{\sigma}{l_{eff}} \sum_{e_s} \iint_{\Omega_{e_s}} \zeta dx dy \quad (11)$$

donde n es el número de nodos en la discretización del modelo por elementos finitos. La matriz de permeabilidad y conductividad contienen información de la geometría y propiedades físicas del problema de campo a resolver. El vector de devanado para regiones conductoras filamentosarias, contiene información del devanado, así como de la distribución de corrientes en los nodos de cada elemento perteneciente a esta región y con este término se puede calcular el voltaje inducido en el devanado. El vector fuente en conductores sólidos y el vector de devanado permiten la interconexión del modelo de campo con el circuito externo de alimentación.

3.1.2. Formulación axisimétrica

En ingeniería eléctrica hay dispositivos electromagnéticos importantes que se pueden analizar con un modelo axisimétrico. Estos incluyen solenoides y transformadores (tanto de distribución como de potencia).

La representación mediante el potencial magnético vectorial del problema axisimétrico de campo electromagnético en baja frecuencia, con corrientes en la dirección azimutal, lleva a la siguiente ecuación de difusión no lineal [14]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A_\phi^*}{\partial z} \right) = -J_{f\phi}^* - J_{s\phi}^* = -J_{f\phi}^* + \frac{\sigma}{r} \left(\frac{\partial A_\phi^*}{\partial t} - \frac{v_s^*}{\phi_{eff}} \right) \quad (12)$$

donde el asterisco se utiliza para enfatizar que las cantidades pertenecen al sistema axisimétrico. A_ϕ^* es la única componente existente del potencial magnético vectorial en la dirección ϕ . Se emplea el cambio de variable $A_\phi^* = r A_\phi$ en (12), para eliminar la asimetría en la matriz de rigidez cuando se aplica el método de Galerkin. $J_{f\phi}^*$, $J_{s\phi}^*$ y v_s^* son la densidad de corriente en regiones con conductores filamentosos, la densidad de corriente no uniforme en regiones con conductores sólidos y la diferencia de potencial en terminales de conductores sólidos, respectivamente. ϕ_{eff} es la región que abarca el modelo axisimétrico, en radianes.

En conductores filamentosos pertenecientes a modelos axisimétricos, la densidad de corriente es uniforme debido a la ausencia de corrientes de remolino. Por lo tanto, la ecuación de difusión (12), se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A_\phi^*}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A_\phi^*}{\partial t} = -\frac{N_f^* i_f^*}{\Lambda_f^*} - \frac{\sigma}{r} \frac{v_s^*}{\phi_{eff}} \quad (13)$$

donde Λ_f^* es el área de la sección transversal de la región filamentaria Ω_f^* .

■ Discretización en el espacio

Discretización por elementos finitos del problema axisimétrico (13), utilizando el método de residuales ponderados de Galerkin:

$$-[S^*]\{a^*\} - \sum_s [D_s^*]\{\dot{a}^*\} + \sum_f [S_f^*]i_f^* + \sum_s [S_s^*]v_s^* = 0 \quad (14)$$

Las matrices y vectores en (14) se definen como:

$$[S^*]_{n \times n} = \sum_e \iint_{\Omega_e^*} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\partial \zeta^T}{\partial r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \zeta^T}{\partial z} \right) dr dz \quad (15)$$

$$[D_s^*]_{n \times n} = \sum_e \iint_{\Omega_e^*} \frac{\sigma}{r} \zeta \zeta^T dr dz \quad (16)$$

$$[S_f^*]_n = \frac{N_f^*}{\Lambda_f^*} \sum_{e_f} \iint_{\Omega_{e_f}^*} \zeta dr dz \quad (17)$$

$$[S_s^*]_n = \frac{\sigma}{\phi_{eff}} \sum_{e_s} \iint_{\Omega_{e_s}} \frac{1}{r} \zeta dr dz \quad (18)$$

Es importante resaltar que los vectores de devanado en regiones con conductores filamentosos, se definen de forma similar en el problema axisimétrico y cartesiano.

3.2. Ecuación de acoplamiento circuito-campo: Conductores filamentosos

Los problemas acoplados circuito-campo con regiones de conductores filamentosos, además de considerar como incógnita el potencial magnético vectorial, también se desconoce la corriente en los sistemas (14) y (7). Para resolver el problema acoplado se utiliza la relación voltaje-corriente de estos conductores, como una ecuación de circuito adicional.

3.2.1. Problema cartesiano

La relación voltaje-corriente para un devanado de N_f conductores conectados en serie, se puede expresar en términos del potencial magnético vectorial usando la ley de inducción de Faraday y la caída de voltaje debido a la resistencia del devanado:

$$v_f = r_f i_f + l_{eff} N_f \frac{\partial}{\partial t} \frac{\iint_{\Omega_f} A_z dx dy}{\Lambda_f} \quad (19)$$

donde r_f es la resistencia en corriente directa del devanado. El segundo término en (19) es el voltaje inducido en el devanado filamentosos. Esta expresión es fundamental, ya que permite el acoplamiento del modelo de campo con el circuito externo de alimentación.

La discretización por elementos finitos de la relación voltaje-corriente (19), se obtiene al utilizar la aproximación polinomial del potencial magnético vectorial definida en (6) con lo que se obtiene:

$$v_f = r_f i_f + [D_f]^T \{\dot{a}\} \quad (20)$$

donde:

$$[D_f]_n = \frac{l_{eff} N_f}{\Lambda_f} \sum_{e_f} \iint_{\Omega_f} \zeta dr dz \quad (21)$$

El sistema discreto en la forma general sugerida en (1) para conductores filamentosos, se obtiene a través de la relación voltaje-corriente definida en (20) y el vector de devanado (10):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_f^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{v}_p \\ \dot{v}_q \\ \dot{i}_f \end{bmatrix}}_S + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -r_f \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ v_p \\ v_q \\ i_f \end{bmatrix}}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_f \quad (22)$$

El tercer término en (7) se ha incorporado en el sistema circuito-campo anterior, con el objetivo de obtener un bloque de acoplamiento entre los sistema de campo con regiones filamentosas y el circuito externo. El sistema es asimétrico, sin embargo se puede recuperar la simetría en el proceso de discretización en el tiempo y linealización. Esta problemática se aborda más adelante.

Se observa que el vector de devanado (10) y el término (21) asociado a la matriz de amortiguamiento, solo difieren por la longitud axial del modelo cartesiano.

3.2.2. Problema axisimétrico

La relación voltaje-corriente para un devanado de N_f^* conductores filamentosos conectados en serie esta dada por:

$$v_f^* = r_f^* i_f^* + \frac{d\lambda_f^*}{dt} \quad (23)$$

donde v_f^* , r_f^* y λ_f^* son el voltaje en terminales, la resistencia del devanado y los encadenamientos de flujo, respectivamente.

Los encadenamientos de flujo en un punto dentro de la región filamentaria, se pueden calcular mediante la siguiente expresión:

$$\lambda_f^* = N_f^* \int_0^{\phi_{eff}} \frac{A_\phi^*}{r} r d\phi = N_f^* \phi_{eff} A_\phi^* \quad (24)$$

para un modelo que abarca una circunferencia ϕ_{eff} . El flujo promedio se obtiene al integrar la expresión anterior, sobre la región con conductores filamentosos:

$$\lambda_f^* = \frac{\phi_{eff} N_f^*}{\Lambda_f^*} \iint_{\Omega_f^*} A_\phi^* dr dz \quad (25)$$

La discretización por elementos finitos de la ecuación de voltaje (23), utilizando una aproximación polinomial del potencial magnético vectorial, se puede escribir en términos de la funciones de forma como:

$$v_f^* = r_f^* i_f^* + [D_f^*]^T \{\dot{a}^*\} \quad (26)$$

donde:

$$[D_f^*]_n = \frac{\phi_{eff} N_f^*}{\Lambda_f^*} \sum_{e_f} \iint_{\Omega_f^*} \zeta dr dz \quad (27)$$

El sistema discreto para regiones con conductores filamentosos en problemas axisimétricos, que permite realizar el acoplamiento entre el sistema de campo y el de circuito, se obtiene mediante las expresiones (26), (17) y la inyección de corrientes en los nodos del circuito donde se conecta el devanado. El bloque de acoplamiento queda definido mediante el siguiente sistema matricial asimétrico:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_f^{*T} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{a}^* \\ \dot{v}_p \\ \dot{v}_q \\ \dot{i}_f^* \end{bmatrix}}_S + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_f^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -r_f^* \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} a^* \\ v_p \\ v_q \\ i_f^* \end{bmatrix}}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_f \quad (28)$$

La única diferencia entre el bloque del sistema discreto para conductores filamentosos en problemas axisimétricos (28), con el bloque discreto cartesiano (22) es el uso de la sección angular ϕ_{eff} o la longitud axial l_{eff} , respectivamente.

3.3. Ecuación de acoplamiento circuito-campo: Conductores sólidos

En los problemas de campo cuasi-3D (13) y (4) en regiones con conductores sólidos, se tiene como incógnita la diferencia de potencial en las terminales del conductor, además del potencial magnético vectorial. El término que involucra la diferencia de potencial en estas expresiones, permite el acoplamiento del modelo de campo con el circuito externo de alimentación. En esta sección se obtiene el bloque del sistema discreto para conductores sólidos en sistemas cartesianos y axisimétricos.

3.3.1. Problema cartesiano

El problema acoplado con conductores sólidos se puede abordar al introducir como variable desconocida la corriente [6], como en el caso de problemas de campo con conductores filamentosos. El problema a tratar es una ecuación integro-diferencial, que para poder resolver se tiene que introducir la relación voltaje-corriente en conductores sólidos como una ecuación adicional. Otra manera de abordar el problema es considerar la diferencia de potencial como variable desconocida, tal y como se muestra en la ecuación (13). La principal ventaja de esta formulación, es que no se tiene que introducir una ecuación voltaje-corriente adicional, además de evitar trabajar con el término integro-diferencial.

La corriente total en conductores sólidos,

$$i_t = i_e + i_s \quad (29)$$

es la expresión que permite el acoplamiento desde el lado del circuito externo de alimentación. i_e es la corriente inducida e i_s es la corriente inyectada por la fuente. Expresando la corriente total en términos de las variables de interés (potencial magnético vectorial y voltajes nodales) se obtiene:

$$i_t = -\sigma \iint_{\Omega_s} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy + \frac{\sigma}{l_{eff}} \iint_{\Omega_s} (v_p - v_q) dx dy \quad (30)$$

Sustituyendo la aproximación polinomial del potencial (6) en (30) y desarrollando los términos se tiene que:

$$i_t = [D_m]^T \{\dot{a}\} + G(v_p - v_q) \quad (31)$$

donde

$$[D_m]_n = \sum_{e_s} \iint_{\Omega_{es}} -\sigma \zeta dx dy \quad (32)$$

y G es la conductancia del conductor sólido,

$$G = \frac{\sigma \Lambda_s}{l_{eff}} \quad (33)$$

Λ_s es el área de la sección transversal de la región Ω_s

De las expresiones (31) y (11) se obtiene el bloque de acoplamiento circuito-campo para conductores sólidos, en la forma general definida en (1):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ D_m^T & 0 & 0 \\ -D_m^T & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{v}_p \\ \dot{v}_q \end{bmatrix}}_S + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & S_s & -S_s \\ 0 & G & -G \\ 0 & -G & G \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ v_p \\ v_q \end{bmatrix}}_S = 0 \quad (34)$$

3.3.2. Problema axisimétrico

En esta sección se obtiene el bloque de acoplamiento para conductores sólidos en problemas axisimétricos.

Si se asume que la densidad de corriente y el potencial magnético vectorial sólo tienen componente en la dirección azimutal en problemas axisimétricos. Entonces el valor del potencial eléctrico escalar es constante sobre la sección transversal del conductor. Si \hat{s} es la longitud de arco del conductor sólido para un modelo que abarca ϕ_{eff} radianes, entonces:

$$v_s^* = -\hat{s} \frac{\partial V^*}{\partial \phi} \quad (35)$$

es la diferencia de potencial en las terminales del conductor. V^* es el potencial eléctrico escalar. La densidad de corriente total se puede escribir en términos de este voltaje en terminales y el potencial magnético vectorial como:

$$J_{s\phi}^* = -\frac{\sigma}{r} \frac{\partial A_\phi^*}{\partial t} + \frac{\sigma}{\hat{s}} v_s^* \quad (36)$$

Integrando la ecuación (36), se obtiene la corriente total en la región con conductores sólidos:

$$i_t^* = -\sigma \iint_{\Omega_s^*} \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi^*}{\partial t} dr dz + \sigma \iint_{\Omega_s^*} \frac{1}{\hat{s}} (v_p - v_q) dr dz \quad (37)$$

La discretización en el espacio de la ecuación (37) es:

$$i_t^* = [D_m^*]^T \{\dot{a}^*\} + G^* (v_p - v_q) \quad (38)$$

donde

$$[D_m^*]_n = \sum_{e_s} \iint_{\Omega_{e_s}^*} -\frac{\sigma}{r} \zeta dr dz \quad (39)$$

y G^* es la conductancia del conductor axisimétrico,

$$G^* = \frac{\sigma}{\phi_{eff}} \iint_{\Omega_s^*} \frac{1}{r} dr dz \quad (40)$$

De las expresiones (38) y (18) se obtiene el siguiente bloque de acoplamiento circuito-campo, para conductores sólidos axisimétricos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ D_m^{*T} & 0 & 0 \\ -D_m^{*T} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} \dot{a}^* \\ \dot{v}_p \\ \dot{v}_q \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & S_s^* & -S_s^* \\ 0 & G^* & -G^* \\ 0 & -G^* & G^* \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} a^* \\ v_p \\ v_q \end{bmatrix} = 0 \quad (41)$$

3.4. Sistema discreto de los modelos de campo electromagnético

Hasta ahora se han obtenido los bloques desacoplados de los sistemas de campo, conductores filamentosos y regiones con conductores sólidos de la forma general establecida en (1). Sin embargo es necesario obtener un bloque discreto acoplado de cada sistema cuasi-3D que involucre cada uno de los bloques antes mencionados.

■ Cartesiano

Los bloques discretos del sistema de campo electromagnético (7), el de conductores filamentosos (22) y conductores sólidos (34) se acoplan fuertemente a través de potencial magnético vectorial, corrientes en conductores filamentosos y voltaje en terminales del conductor sólido.

El bloque discreto del problema de campo cartesiano se puede expresar de forma matricial mediante la siguiente expresión:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -D_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_m^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_m^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_f^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{v}_{pf} \\ \dot{v}_{qf} \\ \dot{v}_{ps} \\ \dot{v}_{qs} \\ \dot{i}_f \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -S & 0 & 0 & S_s & -S_s & S_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & G & -G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G & G & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -r_f \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} a \\ v_{pf} \\ v_{qf} \\ v_{ps} \\ v_{qs} \\ i_f \end{bmatrix} = 0 \quad (42)$$

donde v_{pf} y v_{qf} son los voltajes nodales en terminales del devanado filamentosos. v_{ps} y v_{qs} son los voltajes nodales en terminales del conductor sólido. Estos voltajes permiten interconectar el sistema electromagnético con el circuito externo de alimentación.

Sin tener pérdida de generalidad, el sistema (42) sólo considera una región con conductor sólido y una región filamentaria. El sistema matricial es asimétrico, sin embargo, se recupera la simetría una vez que se discretiza en el dominio del tiempo y se linealiza mediante el método de Newton-Raphson..

Una vez que se incluyen las $f + s$ regiones conductoras, el sistema acoplado que se obtiene es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\mathcal{D}_s & 0_{n \times 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{f \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{f \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_m^T & 0_{s \times 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}_m^T & 0_{s \times 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}_f^T & 0_{f \times 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{v}_{pf} \\ \dot{v}_{qf} \\ \dot{v}_{ps} \\ \dot{v}_{qs} \\ \dot{i}_f \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -S & 0_{n \times f} & 0_{n \times f} & \mathcal{S}_s & -\mathcal{S}_s & \mathcal{S}_f \\ 0_{f \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L} \\ 0_{f \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{L} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{G} & -\mathcal{G} & 0_{s \times f} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G} & \mathcal{G} & 0_{s \times f} \\ 0 & \mathcal{L}^T & -\mathcal{L}^T & 0_{f \times s} & 0_{f \times s} & -\mathcal{R}_f \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ v_{pf} \\ v_{qf} \\ v_{ps} \\ v_{qs} \\ i_f \end{pmatrix}} = 0 \quad (43)$$

donde $[\mathcal{D}_s]_{n \times n} = \sum_s [D_s]$ y $[\mathcal{R}_f]_{f \times f}$ es una matriz diagonal que contiene la resistencia en corriente directa de cada una de las regiones con conductores filamentosos. $[\mathcal{L}]_{f \times f}$ es una matriz que contiene 1 y -1 en sus columnas, dependiendo de los nodos donde se conectan los conductores filamentosos en el circuito. $[\mathcal{S}_s]_{n \times s}$ es una matriz que contiene en sus columnas cada uno de los vectores fuente $[S_s]$. $[\mathcal{S}_f]_{n \times f}$ es una matriz que contiene en sus columnas cada uno de los vectores de devanado $[S_f]$. $[\mathcal{G}]_{s \times s}$ es una matriz diagonal que contiene el valor de la conductividad de cada región s con conductor sólido. Con base en las ecuaciones (10) y (21):

$$[\mathcal{D}_f]_{n \times f} = l_{eff} [S_f] \quad (44)$$

Además de las expresiones (11) y (32) se observa que:

$$[\mathcal{S}_s] = -\frac{1}{l_{eff}} [\mathcal{D}_m] \quad (45)$$

El proceso de incorporación de cada uno de los bloques discretos, tanto de conductores sólidos como de regiones con conductores filamentosos, es relativamente sencillo y se realiza de manera sistemática. Además la incorporación de cada uno de los bloques de conductores electromagnéticos se realiza de manera arbitraria.

■ Axisimétrico

El bloque general que resuelve el problema acoplado axisimétrico con $f + s$ regiones conductoras, se obtiene de forma similar que el caso cartesiano. Si se incorpora el bloque de campo (14), cada uno de los f bloques de conductores filamentosos (28) y los s bloques discretos de conductores sólidos (41), se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\mathcal{D}_s^* & 0_{n \times 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{f \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{f \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_m^{*T} & 0_{s \times 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}_m^{*T} & 0_{s \times 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}_f^{*T} & 0_{f \times 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \begin{Bmatrix} \dot{a}^* \\ \dot{v}_{pf} \\ \dot{v}_{qf} \\ \dot{v}_{ps} \\ \dot{v}_{qs} \\ \dot{i}_f^* \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -S^* & 0_{n \times f} & 0_{n \times f} & S_s^* & -S_s^* & S_f^* \\ 0_{f \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L} \\ 0_{f \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{L} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}^* & -\mathcal{G}^* & 0_{s \times f} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}^* & \mathcal{G}^* & 0_{s \times f} \\ 0 & \mathcal{L}^T & -\mathcal{L}^T & 0_{f \times s} & 0_{f \times s} & -\mathcal{R}_f^* \end{bmatrix}}_S \begin{Bmatrix} a^* \\ v_{pf} \\ v_{qf} \\ v_{ps} \\ v_{qs} \\ i_f^* \end{Bmatrix} = 0 \quad (46)$$

donde $[\mathcal{D}_s^*]_{n \times n} = \sum_s [D_s^*]$ y $[\mathcal{R}_f^*]_{f \times f}$ es una matriz diagonal que contiene la resistencia en corriente directa de cada una de las regiones con conductores filamentosos. De las ecuaciones (17) y (27) se tiene que:

$$[\mathcal{D}_f^*]_{n \times f} = \phi_{eff} [S_f^*] \quad (47)$$

Además de las expresiones (18) y (39):

$$[S_s^*] = -\frac{1}{\phi_{eff}} [\mathcal{D}_m^*] \quad (48)$$

Estas relaciones son importantes ya que permiten recuperar la simetría de los bloques en el proceso iterativo.

4. Programa de trabajo para el semestre 2016-2

El objetivo planteado para el siguiente semestre, es resolver el problema de acoplamiento fuerte de n dispositivos electromagnéticos en el dominio del tiempo sin considerar movimiento. Se plantea resolver tres transformadores monofásicos conectados en estrella y modelados con elementos finitos, alimentados a través de una fuente trifásica.

La teoría que se presentó en este reporte semestral, es la base para plantear el problema de acoplamiento circuito-campo para n sistemas de elementos finitos y circuitos en el dominio del tiempo. La hipótesis de este problema de acoplamiento circuito-campo es:

- Los bloques discretos de sistemas cuasi-3D de la forma establecida en (43) y (46), permiten la incorporación sistemática de n modelos de elementos finitos en el sistema discreto (1), mediante un acoplamiento fuerte a nivel de circuito. La técnica *multi-sistemas* permite incorporar en forma ordenada la información de cada uno de los modelos de campo (geometría, condiciones de frontera y materiales) al sistema general.

Una vez que se tenga resuelto el problema de acoplamiento en el dominio del tiempo, el objetivo es establecer las propiedades numéricas del método e implementar el código en el software de elementos finitos *FLD*.

Referencias

- [1] R. Carlson, C. da Silva, N. Sadowski, Y. Lefevre, and M. Lajoie-Mazenc, "The effect of the stator-slot opening on the interbar currents of skewed cage induction motor," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp. 1285–1288, 2002.
- [2] S. Seman, J. Niiranen, S. Kanerva, A. Arkkio, and J. Saitz, "Performance study of a doubly fed wind-power induction generator under network disturbances," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 21, no. 4, pp. 883–890, 2006.
- [3] N. van der Blij, T. Strous, X. Wang, and H. Polinder, "A novel analytical approach and finite element modelling of a bdfim," in *Electrical Machines (ICEM), 2014 International Conference on*. IEEE, 2014.
- [4] S. Khaliq, M. Modarres, T. Lipo, and B.-i. Kwon, "Design of novel axial flux dual stator doubly fed reluctance machine," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 11, 2015.
- [5] I. A. Tsukerman, A. Konrad, G. Meunier, and J. C. Sabonnadiere, "Coupled field-circuit problems: trends and accomplishments," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1701–1704, 1993.
- [6] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Coupling circuit systems and finite element models: A 2-d time-harmonic modified nodal analysis framework," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 2, pp. 707–715, 2009.
- [7] Y. Huangfu, S. Wang, J. Qiu, H. Zhang, G. Wang, and J. Zhu, "Transient performance analysis of induction motor using field-circuit coupled finite-element method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, pp. 873–876, 2014.
- [8] W. Liang, T. Lu, and W. Fang, "A new time-step method for machine drive analysis by strong coupling magnetic field with the external circuit and control algorithm," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 28, no. 3, pp. 611–618, 2013.
- [9] X. Zhu, M. Cheng, W. Zhao, C. Liu, and K. Chau, "A transient cosimulation approach to performance analysis of hybrid excited doubly salient machine considering indirect field-circuit coupling," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 6, pp. 2558–2560, 2007.
- [10] S. Ho, S. Niu, W. Fu, and J. Zhu, "A sensitivity analysis method for equivalent parameter extraction of transient magnetic field with internal circuits," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 295–298, 2012.
- [11] E. Lange, F. Henrotte, and K. Hameyer, "An efficient field-circuit coupling based on a temporary linearization of fe electrical machine models," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 3, pp. 1258–1261, 2009.
- [12] W. Liang, J. Wang, T. Lu, and W. Fang, "A new method for multiple finite-element models in cosimulation with electrical circuit using machine multiloop modeling scheme," *IEEE Trans. Industrial Elect.*, vol. 61, no. 12, pp. 6583–6590, 2014.

- [13] P. Zhou, D. Lin, W. Fu, B. Ionescu, and Z. Cendes, "A general cosimulation approach for coupled field-circuit problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 4, pp. 1051–1054, 2006.
- [14] P. Lombard and G. Meunier, "A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2d, axisymmetric and transient systems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1737–1740, 1993.
- [15] G. Meunier, D. Shen, and J.-L. Coulomb, "Modelisation of 2d and axisymmetric magnetodynamic domain by the finite elements method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 1, pp. 166–169, 1988.
- [16] S. Salon, R. Palma, and C. Hwang, "Dynamic modeling of an induction motor connected to an adjustable speed drive," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 25, no. 4, pp. 3061–3063, 1989.
- [17] S. Salon, M. DeBortoli, and R. Palma, "Coupling of transient fields, circuits, and motion using finite element analysis," *J. of Electromagn. Waves and Applicat.*, vol. 4, no. 11, pp. 1077–1106, 1990.
- [18] J. Coulomb and G. Meunier, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 20, no. 5, pp. 1894–1896, 1984.
- [19] W. Fu, P. Zhou, D. Lin, S. Stanton, and Z. Cendes, "Modeling of solid conductors in two-dimensional transient finite-element analysis and its application to electric machines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 426–434, 2004.
- [20] P. Zhou, W. Fu, D. Lin, S. Stanton, and Z. Cendes, "Numerical modeling of magnetic devices," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 4, pp. 1803–1809, 2004.
- [21] H. De Gersem, R. Mertens, D. Lahaye, S. Vandewalle, and K. Hameyer, "Solution strategies for transient, field-circuit coupled systems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1531–1534, 2000.
- [22] N. Sadowski, R. Carlson, S. Arruda, C. Da Silva, and M. Lajoie-Mazenc, "Simulation of single-phase induction motor by a general method coupling field and circuit equations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, pp. 1908–1911, 1995.
- [23] A. Oliveira, P. Kuo-Peng, M. F. Da Luz, N. Sadowski, and J. Bastos, "Generalization of coupled circuit-field calculation for polyphase structures," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no. 5, pp. 3444–3447, 2001.
- [24] L. Wedepohl and L. Jackson, "Modified nodal analysis: an essential addition to electrical circuit theory and analysis," *Engineering Science & Education Journal*, vol. 11, no. 3, pp. 84–92, 2002.
- [25] M. C. Costa, S. I. Nabeta, and J. R. Cardoso, "Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with fem in the simulation of a universal motor," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1431–1434, 2000.
- [26] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, J. Alvarez-Ramirez, and A. L. Laureano-Cruces, "Nonlinear time-harmonic finite-element analysis of coupled circuits and fields in low frequency electromagnetic devices," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 46, no. 10, pp. 829–837, 2010.