

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
AZCAPOTZALCO

GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE:
“Combinatoria, Control y Optimización”

PROPUESTA DE NUEVO PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:
“Resolución de problemas de gráficas usando el polinomio cromático”

RESPONSABLE: Ma. Guadalupe Rodríguez Sánchez

30 de marzo de 2022

- a. Departamento de Ciencias Básicas.
- b. Grupo de investigación: Combinatoria, Control y Optimización.
- c. Espacio físico en el que se realizará la investigación: Edificio H
- d. Nombre del proyecto: Resolución de problemas de gráficas usando el polinomio cromático.
- e. Duración prevista: 24 meses.
- f. Línea de Investigación Divisional: *Investigaciones teóricas y experimentales.*
- g. Programa de Investigación: Optimización en estructuras discretas y continuas.
Representabilidad e Invariantes de estructuras combinatorias. Geometría sub-Riemanniana y Control Optimo en sistemas de evolución no-lineales. Aplicaciones a Estructuras Combinatorias y al Control Optimo Estocástico.

h. Responsable:

Nombre: Ma. Guadalupe Rodríguez Sánchez

Número Económico: 4811


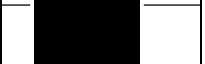
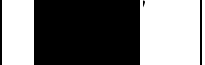
Categoría y nivel: Titular C. Último grado obtenido Doctor

Correo electrónico rsmg@azc.uam.mx

Firma



i. Participantes

Nombre	Adscripción	Núm. empleado	Categoría y nivel	Grado	Correo electrónico	Firma
Laura Elena Chávez Lomelí	Departamento de Ciencias Básicas	25076	Asociado D	Doctora	lelc@azc.uam.mx	
María Guadalupe Rodríguez Sánchez	Departamento de Ciencias Básicas	4811	Titular C	Doctora	rsmg@azc.uam.mx	
Johana Luviano Flores	Departamento de Ciencias Básicas	41236	Titular A	Doctora	jlf@azc.uam.mx	

PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

- a. Departamento de Ciencias Básicas.
- b. Grupo de investigación: Combinatoria, Control y Optimización.

c. Responsable: María Guadalupe Rodríguez Sánchez

d. Nombre del proyecto: Resolución de problemas de gráficas usando el polinomio cromático.

e. Objetivos

General:

Obtener propiedades, diseñar algoritmos y métodos de solución eficientes para problemas de gráficas utilizando el polinomio cromático.

Particulares

1. Diseñar modelos y algoritmos de solución de los problemas de coloración de gráficas, mediante la utilización del polinomio cromático.
2. Implementar programas de cómputo que nos permitan, mediante el cálculo del polinomio cromático de gráficas, obtener clasificaciones de gráficas en familias de gráficas caracterizadas por cumplir propiedades y condiciones específicas. En particular, encontrar las familias de gráficas que son χ -equivalentes, para un número fijo de vértices, así como las gráficas que son χ -únicas y problemas derivados de dichos conceptos.
3. Formar recursos humanos, involucrando a alumnos de tesis y servicio social.
4. Proponer posibles aplicaciones a problemas que se pueden modelar mediante gráficas, como son los problemas de asignación de horarios de ejecución de tareas, las interferencias de distintas longitudes de ondas en estaciones de radio, el almacenamiento de productos químicos, etc.

f. Antecedentes

f1. Conceptos generales del tema

En 1912 Birkhoff propuso una función $P(M, \lambda)$, definida para todos los enteros positivos λ , que proporciona el número de formas de colorear las regiones de un mapa M con λ colores, de forma que ningún par de regiones adyacentes tengan el mismo color. El interés de Birkhoff era desarrollar nuevas herramientas para demostrar el Teorema de los 4 colores, dado que si se pudiera demostrar que $P(M, 4) > 0$ para todos los mapas M , se tendría una respuesta positiva a la que en ese tiempo era la conjetura de los cuatro colores.

A la función $P(M, \lambda)$ se le llama la función cromática de M . Esta función fue generalizada para colorear los vértices de gráficas arbitrarias por Whitney en 1932, y su estudio se extendió para todos los valores reales y complejos de λ . En 1946 Birkhoff y Lewis obtuvieron resultados relativos a la distribución de raíces reales de funciones cromáticas de gráficas planas y conjeturaron que esos polinomios no tienen ninguna raíz real mayor o igual que 4.

Sea G una gráfica simple y $\lambda \in \mathbb{N}$. Considérense dos λ -coloraciones de G c y c' . Se dice que $c \neq c'$ si existe un vértice v en G tal que tiene asignados colores diferentes c y c' . $P(G, \lambda)$ se define como el número de λ -coloraciones distintas de G . Por convención, $P(G, 0) = 0$. Por definición $P(G, \lambda) \geq 1$ si y

sólo si G es λ -coloreable. Así, $P(G, \chi(G)) \geq 1$ y $P(G, r) = 0$ si r es un número natural y $r < \chi(G)$, para $\chi(G)$ el número cromático de G . Esto es $\chi(G) = \min \{\lambda \in \mathbb{N} : P(G, \lambda) \geq 1\}$.

Un hecho fundamental acerca de la función cromática $P(G, \lambda)$ es que ésta es una función polinomial, es decir la expresión $P(G, \lambda)$ es un polinomio en λ . Así, a $P(G, \lambda)$ se le conoce, como el *polinomio cromático* de G .

f2. Antecedentes particulares a los problemas que se quieren resolver

Se dice que dos gráficas son *cromáticamente equivalentes* si tienen el mismo polinomio cromático. Dos gráficas que son cromáticamente equivalentes coinciden en su orden, tamaño y número cromático. En general no se conoce, bajo que condiciones dos gráficas son cromáticamente equivalentes. Una gráfica G es *cromáticamente única* si $P(H, \lambda) = P(G, \lambda)$ implica que H y G son gráficas isomorfas. En este proyecto se quiere determinar condiciones para la equivalencia bajo cromaticidad de gráficas y la cromaticidad única. La equivalencia bajo cromaticidad de gráficas es una relación de equivalencia, luego se desea determinar las clases de equivalencia de familias de gráficas que tienen alguna característica importante, desde el punto de vista teórico y de posibles aplicaciones. Lo mismo para gráficas que tienen cromaticidad única.

En estos temas se tiene como antecedente la tesis de licenciatura con referencia [17], así mismo la referencia [12] que es un proyecto de servicio social que se realizó en el año 2013, ambos dirigidos por la responsable del proyecto que se propone. Actualmente, la responsable del proyecto propuesto está dirigiendo el proyecto de servicio social "Generación de familias de gráficas que son equivalentes con base en su polinomio cromático" que pretende profundizar y ampliar el material de la referencia [17].

f3. Notas relacionadas con los antecedentes

Un ejemplo de una aplicación del polinomio cromático es a la asignación de horarios. Un ejemplo es la programación del horario de las clases que se imparten en una escuela, de manera que ningún alumno tenga clases simultáneamente en alguna hora y al mismo tiempo la asignación sea óptima respecto al tiempo empleado para su secuenciación de clases. Este problema se puede modelar mediante una gráfica cuyos vértices denoten los diferentes cursos y tal que se ponga una arista entre dos cursos que no pueden darse a la misma hora. Si se asocia un color a cada hora disponible para las clases, entonces un coloreado propio de los vértices de la gráfica corresponde a una programación correcta de todas las clases. El conocimiento del polinomio cromático de la gráfica proporcionará la información de si la programación es posible y si así es, cuántas maneras posibles hay de realizar una asignación correcta.

El *polinomio de Tutte* $T(G; x, y)$ de una gráfica G , en las variables x y y , guarda una gran cantidad de información estructural de la gráfica y está emparentado con el polinomio cromático de G , pues se puede obtener $P(G, \lambda)$ como una evaluación del polinomio de Tutte.

Es importante mencionar que el cálculo del polinomio cromático de una gráfica es NP-duro. Por esta razón habrá problemas para los cuales se efectuarán cálculos hasta cierto valor de n , siendo n el número de vértices de la gráfica.

El tema del polinomio cromático puede considerarse inmerso en el universo del estudio de coloraciones de gráficas, como el cálculo de su número e índice cromáticos y de su número cromático circular e índice cromático circular de gráficas, entre otros muchos problemas que involucran coloraciones.

g. Metodología

1. Hacer una revisión bibliográfica de los libros y artículos que han sido publicados, sobre el tema. Poniendo el énfasis en los problemas de equivalencia y unicidad cromáticas.
2. Revisar como un antecedente, el trabajo “ χ -equivalencia de gráficas y χ -unicidad de gráficas en base a su polinomio cromático”, que elaboró David Téllez, como proyecto terminal para obtener la licenciatura en Ingeniería en Computación, en el año 2015, [17].
3. Hacer una revisión de los materiales computacionales que se utilizarán: Nauty, Mathematica, Maple, así como de las adecuaciones que se tiene de esas herramientas computacionales. Los paquetes Nauty y Maple los tenemos y la licencia de Mathematica nos la puede proporcionar los servicios de cómputo de UAM-A.
4. Determinación de una estrategia computacional para el manejo de datos, para los cuales resulte insuficiente el equipo del departamento de Ciencias Básicas, con el cual contamos. De ser necesario, se contempla la posibilidad de solicitar apoyo al Area de Optimización Combinatoria del Departamento de Sistemas, que cuenta con máquinas mejor equipadas de las que nosotros disponemos.
5. Determinación de los problemas que se quieren resolver, usando como referente el polinomio cromático de las familias de gráficas que tienen cierta propiedad que se quiere investigar, en particular encontrar las familias de gráficas que tienen el mismo polinomio cromático, para un n fijo, siendo n el número de vértices de las gráficas que forman la familia en estudio. Las aplicaciones más directas son de tipo teórico, vistas como una profundización de propiedades de familias de gráficas. Desde el punto de vista práctico, la referencia [6] provee de una lista de problemas que se resuelven mediante coloraciones de gráficas, que sirven como modelo para el planteamiento de los problemas en cuestión y se pueden clasificar como problemas de asignación de horarios. Uno de ellos es la asignación de intervalos de luz verde en los diferentes semáforos colocados en las intersecciones de calles en las que confluyen varios flujos de tráfico, con el objetivo de minimizar el tiempo en que todos los flujos tuvieron la oportunidad de avanzar. Este problema se estudió en [19], habiéndose resuelto con otro tipo de herramienta. También en [20] se plantean otro tipo de asignaciones de trabajos, usando el número cromático circular.

h. Recursos disponibles y necesarios

Recursos	Disponibles	Necesarios
Equipo de cómputo personal	X	

Equipo de cómputo de mayor potencia	4 servidores marca HP, Modelo PROLIANT BL465C G7 SERVER BLADE 6174 128GB	
Viáticos y gastos de viaje para asistencia a eventos especializados		X
Recursos económicos para pagar inscripción a congresos y eventos especializados		X

i. Metas académicas

PRIMER AÑO:

- Desarrollar un paquete computacional que calcule el polinomio cromático de una gráfica particular o una familia de gráficas y que entregue evaluaciones particulares de los polinomios.
- Presentar los resultados que se obtengan en congresos nacionales y eventos especializados.
- Formar recursos humanos, mediante la dirección de alumnos de servicio social y la invitación a alumnos a realizar trabajos terminales en los temas relacionados con el cálculo de polinomios cromáticos de gráficas.

SEGUNDO AÑO:

- Presentar los resultados que se obtengan en congresos o eventos especializados.
- Generar al menos un artículo para publicar en una revista indizada.

j. Productos de trabajo

Productos	Año 1	Año 2
Modelos matemáticos para los problemas a estudiar	x	
Algoritmos para resolver los problemas	x	
Publicación de al menos un artículo		x
Asistencia a Congreso Nacional	x	x
Asistencia a Congreso Internacional		x
Servicios sociales cumplidos	x	

k. Cronograma de actividades

Actividades por trimestre	Primer año	Primer año	Primer año	Segundo año	Segundo año	Segundo año
	I	P	O	I	P	O
Revisar la bibliografía necesaria	x	x	x	x		
Elaborar programas de cómputo para calcular polinomios	x	x	x			
Diseñar algoritmos para la solución de los problemas propuestos	x	x	x	x		
Presentar al menos un trabajo en evento especializado	x		x	x		x
Enviar al menos un artículo a una revista indizada para su posible publicación					x	x
Terminar el proyecto de servicio social "Generación de familias de gráficas que son equivalentes con base en su polinomio cromático"			x			
Escribir el Informe del proyecto.						x

I. Referencias

- [1] Appel K., Haken W., *Every planar graph is four colorable. Part I - Discharging*, Illinois J. Math. 21 (1977), 429-490.
- [2] Cameron P., *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] Biggs N., *Algebraic graph theory*. Cambridge University Press (1974, 1993).
- [4] Brylawski T. and Oxley J. G., *The Tutte Polynomial and Its Applications*, Encyclopedia of mathematics and its applications; v. 40, Cambridge University Press (1992), 123-225.
- [5] Cameron P., *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*. Cambridge University Press, 1994.
- [6] Chartrand G., Zhang P., *Chromatic Graph Theory*. Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, 2009.
- [7] Dong F. M., Koh K. M., Teo K. L., *Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.

- [8] Godsil, Ch., Royle G., *Algebraic Graph Theory*,. Graduate Texts in Mathematics 207, Springer-Verlag New York, Inc., 2001.
- [9] Grimaldi, R. P., *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, S.A., 1997.
- [10] Harary F. *Graph Theory*. Addison Wesley, 1969.
- [11] Kubale M. Editor, *Graph Colorings, Contemporary Mathematics*, 352 American Mathematical Society (2004).
- [12] Mateos A., *Resolución del problema de Akiyama y Harari sobre el polinomio cromático de una gráfica y su complemento*. Proyecto de Servicio Social. Departamento de Ciencia Básicas, UAM-A, 2013.
- [13] Nelson R. and Wilson R. J., *Graph Colourings*, Π Pitman Research Notes in Mathematics Series; v. 218, Longman Scientific and Technical (1990).
- [14] Matousek J. and Nešetřil J., *Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 1998.
- [15] Robertson N., Sanders D., Seymour P., Thomas R., *The four color theorem*. J. Comb. Th. B. 70 (1997), 2-44.
- [16] Saaty T. L. and Kainen P. C., *The Four- Color Problem*. Mc Graw-Hill, 1977.
- [17] Téllez D., *χ -equivalencia de gráficas y χ -unicidad de gráficas en base a su polinomio cromático*. Tesis de licenciatura en Ingeniería en Computación. UAM-A, 2015.
- [18] Wilson R., *Introducción a la Teoría de Grafos*. Alianza Editorial, 1983.

Referencias relacionadas:

- [19] Rodríguez G, Herrera S., *La coloración circular de gráficas. Una aplicación al problema de cruces vehiculares*. Miscelánea Matemática 58, (2014) 11-30, SMM. ISSN 1665-5478.
- [20] Rodríguez J., *Problema de sistemas de producción cíclica aplicando el índice cromático circular*. Tesis de Maestría en Optimización, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, 2016.
- [21] Rodríguez G, Rodríguez J., *Índice cromático circular, snarks y extensiones de la familia Blanuša tipo 1*. Morfismos, Depto. de Matemáticas, CINVESTAV. Vol. 24, No. 2, 2020, pp. 1–25. ISSN 1870-6525.