

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
AZCAPOTZALCO

GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE:
“Combinatoria, Control y Optimización”

PROPUESTA DE NUEVO PROYECTO DE INVESTIGACIÓN :

“Propiedades Turnpike en Problemas de Control Óptimo Estocástico”

RESPONSABLE: Cutberto Romero Meléndez

9 de mayo de 2022

- a. Departamento de Ciencias Básicas.
- b. Grupo de investigación: Combinatoria, Control y Optimización.
- c. Espacio físico en el que se realizará la investigación: Edificio H.
- d. Nombre del proyecto: Propiedades Turnpike en Problemas de Control Óptimo Estocástico.
- e. Duración prevista: 36 meses.
- f. Línea de Investigación Divisional: Investigaciones teóricas y experimentales.
- g. Programa de Investigación: Optimización en estructuras discretas y continuas. Representabilidad e Invariantes de estructuras combinatorias. Geometría sub-Riemanniana y Control Óptimo en sistemas de evolución no-lineales. Aplicaciones a Estructuras Combinatorias y al Control Óptimo Estocástico.

h. Responsable:

Nombre: Cutberto Romero Meléndez

Número Económico: 9434

Categoría y nivel: Titular C.

Último grado obtenido: Doctor

Correo electrónico cutberto@azc.uam.mx

Firma



i. Participantes

Nombre	Adscripción	Núm. empleado	Categoría y nivel	Grado	Correo electrónico	Firma
Cutberto Romero Meléndez	Departamento de Ciencias Básicas	9434	Titular C	Doctor	cutberto@azc.uam.mx	
Felipe Monroy Pérez	Departamento de Ciencias Básicas	13099	Titular C	Doctor	fmp@azc.uam.mx	
Marisela Guzmán Gómez	Departamento de Ciencias Básicas	10494	Titular B	Doctora	mgg@azc.uam.mx	
David Castillo Fernández	Departamento de Ciencias Básicas	27820	Asociado C	M. en C.	dacafe@azc.uam.mx	
Leopoldo González Santos	Instituto de Neurobiología UNAM	Externo	Profesor	M. en C.	lgs@unam.mx	
Baltazar Aguirre Hernández	Departamento de Matemáticas UAM-I	18427	Titular C	Doctor	bahe@xanum.mx	

PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

a. Departamento de Ciencias Básicas.

b. Grupo de investigación: Combinatoria, Control y Optimización.

c. Responsable: Cutberto Romero Meléndez

d. Nombre del proyecto: Propiedades Turnpike en Problemas de Control Óptimo Estocástico.

e. Objetivos

Objetivo General:

Estudiar las propiedades Turnpike en problemas de Control Óptimo Estocástico, utilizando técnicas geométricas de Teoría de Control, Análisis Polinomial, Balance Armónico, el Mapeo de Poincaré y esquemas numéricos.

Objetivos Particulares:

1. Encontrar condiciones suficientes para la prevalencia y robustez del fenómeno Turnpike para garantizar un tipo de estabilidad en las poblaciones.
2. Analizar la estabilidad del fenómeno Turnpike utilizando mayoraciones o cotas de tipo exponencial.
3. Analizar la existencia o no existencia de bifurcaciones para conocer los cambios cualitativos de las soluciones al variar los parámetros del modelo.
4. Probar la existencia de ciclos límite para determinar el comportamiento de familias de soluciones del sistema.
5. Obtener algoritmos y programas de cómputo para algunos esquemas numéricos, que permitan resolver numéricamente los sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas.

f. Antecedentes

Las ecuaciones de Lotka-Volterra son el modelo de interacción depredador-presa más simple entre dos poblaciones. Este modelo supone que la población de presas encuentra comida todo el tiempo, que la comida del depredador depende completamente de la población de presas y que el entorno no fluctúa de modo que pueda influir en las dos poblaciones. El modelo consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Se consideran las funciones diferenciables que representan la densidad de la población de dos especies, una de ellas la presa $x_1(t)$, y la otra $x_2(t)$, el depredador. Se conoce la razón α de crecimiento intrínseco de la población de la presa x_1 , la razón γ de mortalidad de la población del depredador x_2 , la tasa β de contactos por unidad de tiempo entre x_1 y x_2 , la razón δ de contactos por unidad de tiempo entre $x_2(t)$ y $x_1(t)$. Las funciones de control $u_1(t), u_2(t)$ representan, por ejemplo, los índices de caza de cada especie. Se utiliza el modelo de Lotka-Volterra, pues la evolución real de este tipo de poblaciones es Malthusiana, es decir, la población crece libremente de forma exponencial, sin restricción de la cantidad disponible de alimentos:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 - 0.4 u_1(t) x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\gamma x_2 + \delta x_2 x_1 - 0.2 u_2(t) x_2$$

No existe una solución explícita para el sistema anterior, pero se pueden encontrar soluciones numéricas. Es bien sabido que este sistema tiene una solución estable en $(0,0)$ y que tiene una solución no asintótica y un ciclo límite [4]. Además, existen soluciones positivas, y se sabe de la existencia y unicidad de soluciones positivas globales [5]. Este

modelo determinista, sin embargo, no tiene en cuenta las fluctuaciones en el medio ambiente, las cuales juegan, en general, un papel importante en cualquier sistema biológico real [2], presentando perturbaciones causadas por variaciones aleatorias naturales en las condiciones ambientales. En el estudio y modelado de la interacción entre poblaciones, también es importante considerar algunos factores estocásticos que tienen impacto en su crecimiento, persistencia y extinción. Los factores demográficos y ambientales, actuando como perturbaciones o procesos de difusión, pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales estocásticas adecuadas, que toman en cuenta el hecho de que eventos estocásticos individuales e independientes pueden afectar a cada población, por lo que deben contener diferentes procesos de difusión.

La existencia y singularidad de una solución global positiva del sistema y las condiciones bajo las cuales se produce la extinción de un modelo estocástico de presa-depredador se han estudiado ampliamente mediante varios métodos [6–8], incluido el Principio del Máximo Estocástico (ver [9]). En [10] se obtiene la acotación uniforme estocástica de la solución y la existencia de una solución positiva globalmente única, para un modelo de depredador y presa que incorpora invasión de enfermedades y shocks catastróficos repentinos. Además, para modelos estocásticos depredador-presa con retardo distribuido y ruido blanco, se ha demostrado la existencia al menos de una solución T-periódica positiva, mediante la construcción de una función estocástica de Lyapunov con cambio de régimen [11]. En [12] se investiga un modelo de tres especies con retrasos de tiempo y saltos de Lévy, dando las condiciones suficientes para la persistencia y la extinción de tres especies, uno-depredador y dos-presas. A diferencia del enfoque propuesto en este proyecto, utilizan el proceso estocástico discontinuo para estudiar algunos fenómenos de naturaleza abrupta como el cambio climático y no introducen controles en las especies, como hacemos en este análisis.

Asimismo, se han estudiado algunos sistemas de mutualismo (con la cooperación de dos especies) en entornos aleatorios, obteniendo soluciones positivas y su unicidad [13]. Sin embargo, existe literatura matemática limitada sobre la acotación en la convergencia media y fuerte para soluciones numéricas [20] y la propiedad Turnpike para sistemas estocásticos controlados [14,15, 22].

En ocasiones, la aparición de fluctuaciones aleatorias en el medio ambiente altera la dinámica poblacional de los sistemas deterministas, provocando el proceso de extinción. Entonces, el modelo correspondiente puede perder la acotación de las soluciones, su estabilidad o su robustez y el esquema numérico puede diverger.

Se parte del sistema:

$$\begin{aligned} dx_1 &= (\alpha x_1 - \beta x_1 x_2 - \mu u_1(t)x_1)dt + \alpha_1 dW_1 \\ dx_2 &= (-\gamma x_2 + \delta x_2 x_1 - \eta u_2(t)x_2)dt + \alpha_2 dW_2 \end{aligned}$$

en donde W_1 y W_2 son procesos estándar de Wiener definidos en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \eta, \alpha_1, \alpha_2$ son constantes.

Cuando ocurre una fluctuación ambiental, la estabilidad de la solución Turnpike podría verse alterada, provocando la pérdida de la optimización. Por lo tanto, es importante analizar la persistencia de las propiedades anteriores, porque hacerlo nos permite describir

la degeneración de las propiedades del sistema. Una novedad de nuestro análisis [1] es el uso de dos controles en las poblaciones y la extensión del trabajo de [15] a un caso estocástico, utilizando el Principio del Máximo Estocástico. Así, hemos combinado algunas técnicas de la Teoría del Control Geométrico (ver [19, 23]) con la propiedad de estabilidad exponencial de la solución numérica de nuestro modelo estocástico. Consideramos que un marco estocástico permite un estudio más realista de la dinámica de la población y los sistemas de competencia. Esta consideración es igualmente válida en otras áreas, donde el objetivo es obtener la estabilidad asintótica de las trayectorias en puntos temporales tardíos [16], bajo diferentes condiciones iniciales, por ejemplo, en el modelo de crecimiento agregado en economía [17] o en el análisis y diseño de esquemas de optimización dinámica en tiempo real y control predictivo del modelo económico (ver [18]).

Habiendo demostrado en [1] el siguiente teorema sobre la propiedad de tipo exponencial, llamada propiedad Turnpike:

Teorema.

La solución del siguiente problema de control óptimo,

$$\min_{u_1, u_2} J(u_1, u_2) = \min_{u_1, u_2} E \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt \right\},$$

$$dx_1 = (\alpha x_1 - \beta x_1 x_2 - \mu u_1(t)x_1)dt + \alpha_1 dW_1$$

$$dx_2 = (-\gamma x_2 + \delta x_2 x_1 - \eta u_2(t)x_2)dt + \alpha_2 dW_2$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_1(T) = x_{11}, x_2(T) = x_{21},$$

$$|u_1(t)| \leq 1, |u_2(t)| \leq 1$$

satisface la siguiente propiedad: existen constantes positivas C_1, C_2 tales que

$$\|x_T(t) - \bar{x}\| + \|p_T(t) - \bar{p}\| + \|u_T(t) - \bar{u}\| \leq C_1 e^{-C_2 t}, \quad \forall t \in [0, T]$$

donde $x = (x_1, x_2), u = (u_1, u_2), p = (p_1, p_2)$ es la variable adjunta al estado y $\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}$ son las soluciones del problema estático de control óptimo estocástico correspondiente al sistema.

Se propone el siguiente:

Proyecto.

Estudiar el comportamiento a largo plazo de soluciones de ciertos problemas de Control Óptimo Estocástico, cuya forma general es:

$$dx = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dW(t)$$

en donde

- $u(t) = (u_1(t), u_2(t)): R \rightarrow R^n$
- $f(t, x(t), u(t)) = f_i(t, x(t), u(t))_{1 \leq i \leq m}$ es una función medible definida sobre $R^m \times [0, T] \times R^m$ y R^m –valuada.

- $g(t, x(t), u(t)) = g_{ij}(t, x(t), u(t))_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq i \leq m}}$ es una función medible definida sobre $R^m \times [0, T] \times R^m$ y $R^{m \times d}$ – valuada.

en relación con:

1. La estabilidad exponencial llamada Turnpike, que consiste en la permanencia de las soluciones óptimas en una vecindad de una solución de equilibrio, balanceada, correspondiente a la solución óptima del problema estacionario respectivo.
2. La robustez de la propiedad de Turnpike.
3. La existencia de ciclos límite.
4. La existencia de bifurcaciones.

g. Metodología

1. Utilizar métodos geométricos de la Teoría de Control, tales como el Principio del Máximo de Pontryagin y sus extensión al caso estocástico. Inicio con el caso de Control lineal y costo cuadrático (L-Q) (ver [21]) y un modelo de Lotka-Volterra (L-V) general.
2. Realizar un análisis de las ecuaciones algebraicas matriciales de tipo Riccati que resultan del método aplicado.
3. Emplear el Mapeo de Poincaré en el estudio de las bifurcaciones.
4. Realizar el Balance Armónico del problema.
5. Estudio numérico del comportamiento de las soluciones, empleando lenguaje R o lenguaje C en la programación de algunos esquemas numéricos.

h. Recursos disponibles y necesarios

h1. Recursos físicos disponibles

Computadoras personales de los colaboradores.

h2. Recursos económicos necesarios

Se requieren recursos económicos para: publicación de un artículo anual en una revista indexada, viáticos, gastos de viaje e inscripciones a eventos académicos nacionales (uno por año) e internacionales (uno por año).

i. Metas académicas

PRIMER AÑO:

- Un artículo en una revista indexada (Complexity, Symmetry o Nonlinearity).
- Presentación de resultados en un congreso nacional y uno internacional.

SEGUNDO AÑO:

- Un artículo en una revista indexada (Complexity, Symmetry o Nonlinearity).
- Presentación de resultados en un congreso nacional y uno internacional.
- Inicio de doctorado de un estudiante en el proyecto.

TERCER AÑO:

- Un artículo en una revista indexada (Complexity, Symmetry o Nonlinearity).
- Presentación de resultados en un congreso internacional.
- Continuación del doctorado de un estudiante en el proyecto.

j. Productos de trabajo

Productos	Año 1	Año 2	Año 3
Artículo en revista indexada	X	X	X
Asistencia a Congreso Nacional	X	X	X
Asistencia a Congreso Internacional	X	X	X
Alumno de doctorado		X	X

k. Cronograma de actividades

Actividades por trimestre	Primer año	Primer año	Primer año
	I	P	O
Estudio del caso Lineal-Cuadrático (L-Q)	X	X	X
Estudio del modelo L-V general	X	X	X
Prueba del caso L-Q y L-V			X
Elaboración del programa, caso L-Q y L-V			X
Presentación de al menos un trabajo en evento especializado			X

Envío de al menos un artículo a revista indizada para posible publicación			X
---	--	--	---

Actividades por trimestre	Segundo año	Segundo año	Segundo año
	I	P	O
Estudio del caso general	X	X	X
Elaboración del programa, caso general		X	X
Presentación de al menos un trabajo en evento especializado			X
Envío de al menos un artículo a revista indizada para posible publicación			X
Alumno de doctorado	X	X	X

Actividades por trimestre	Tercer año	Tercer año	Tercer año
	I	P	O
Estudio del caso general	X	X	X
Prueba del caso L-Q		X	X
Elaboración del programa, caso general		X	X
Presentación de al menos un trabajo en evento especializado			X
Envío de al menos un artículo a revista indizada para posible publicación			X
Alumno de doctorado	X	X	X

I. Referencias

[1] C. Romero-Meléndez, D. Castillo-Fernández and L. González-Santos, On the boundedness of the numerical-solutions' mean value in a stochastic Lotka-Volterra model and the turnpike property. Complexity, vol. 2021, <https://doi.org/10.1155/2021/4445496>

- [2] L. Arnold, W. Horsthemke, and J. W. Stucki, "The influence of External real and white noise on the LOTKA-VOLTERRA model," *Biometrical Journal*, vol. 21, no. 5, pp. 451–471, 1979.
- [3] D. G. Chapman, "Stochastics model in animal population ecology", in *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley University of California Press, vol. 4, pp. 147–162, Berkeley, CA, USA, 1967.
- [4] R. M. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, 1973.
- [5] J. Liu and W. Zhao, "Dynamic Analysis of Stochastic Lotka–Volterra Predator-Prey Model with Discrete Delays and Feedback Control", *Complexity*, vol. 2019.
- [6] A. Das and G. P. Samanta, "Stochastic prey-predator model with additional food for predator", *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, vol. 512, pp. 121–141, 2018.
- [7] S.-R. Cheng, "Stochastic population systems," *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 27, no. 4, pp. 854–874, 2009.
- [8] G. Q. Cai and Y. K. Lin, "Stochastic analysis of predator-prey type ecosystems", *Ecological Complexity*, vol. 4, no. 4, pp. 242–249, 2007.
- [9] X. D. Gu and W. Q. Zhu, "Stochastic optimal control of predator-prey ecosystem by using stochastic maximum principle", *Nonlinear Dynamics*, vol. 85, no. 2, pp. 1177–1184, 2016.
- [10] T. Feng, X. Meng, T. Zhang, and Z. Qiu, "Analysis of the predator–prey interactions: a stochastic model incorporating disease invasion", *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 19, p. 2, 2020.
- [11] Q. Liu, D. Jiang, and T. Hayat, "Dynamics of stochastic predator–prey models with distributed delay and stage structure for prey," *International Journal of Biomathematics*, vol. 14, p. 4, 2021.
- [12] T. Ma, X. Meng, and Z. Chang, "Dynamics and optimal Harvesting control for a stochastic one-predator-two-prey time delay system with jumps," *Complexity*, vol. 2019, 2019.
- [13] G. Liu, H. Qi, Z. Chang, and X. Meng, "Asymptotic stability of a stochastic May mutualism system," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 79, no. 3, pp. 735–745, 2020.
- [14] A. Ibáñez, "Optimal control of the Lotka-Volterra system: turnpike property and numerical simulations," *Journal of Biological Dynamics*, vol. 11, no. 1, pp. 25–41, 2017.
- [15] E. Trélat and E. Zuazua, "The turnpike property in finite dimensional nonlinear optimal control", *Journal of Differential Equations*, vol. 258, no. 1, pp. 81–114, 2015.
- [16] R. Z. Khasminskii and F. C. Klebaner, "Long term behavior of solutions of the Lotka–Volterra system under small random perturbations," *Annals of Applied Probability*, vol. 11, pp. 952–963, 2001.
- [17] S. Joshi, "Turnpike theorems in Nonconvex Nonstationary environments," *International Economic Review*, vol. 38, no. 1, pp. 225–248, 1997.

- [18] T. Faulwasser, M. Korda, C. N. Jones, and D. Bonvin, "Turnpike and dissipativity properties in dynamic real-time optimization and economic," MPC 53rd IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2734–2739, 2014.
- [19] A. Zaslavski, Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control, Springer, 2006.
- [20] D. Barbu, "Local and global existence for mild solutions of stochastic differential equations," Portugal. Math. vol. 55, pp. 411–424, 1998.
- [21] Sun, J., Wang, H., & Yong, J. Turnpike Properties for Stochastic Linear-Quadratic Optimal Control Problems. *arXiv preprint arXiv:2202.12699*, 2022.
- [22] Esteve-Yagüe, C., Geshkovski, B., Pighin, D. and Zuazua, E. Turnpike in Lipschitz—nonlinear optimal control. *Nonlinearity*, Volume 35, Number 4, 2022.
- [23] Sakamoto, N., Zuazua, E., The turnpike property in nonlinear optimal control - A geometric approach. *Automática*, 2021.