

EXAMEN GLOBAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL

4 de diciembre de 2012; de 15:00 a 18:00 horas.

Nombre: _____ Matrícula: _____

*El examen global consta de los ejercicios que se encuentran marcados con el símbolo *.
Todas las respuestas deben tener su desarrollo.*

PRIMERA PARTE

1. * (10 puntos) Derive la siguiente función:

$$f(x) = \operatorname{sen}^3(\cos(x^2 + x)) + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

2. * (15 puntos) Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto (1, 2) a la curva definida por la ecuación:

$$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x - 25.$$

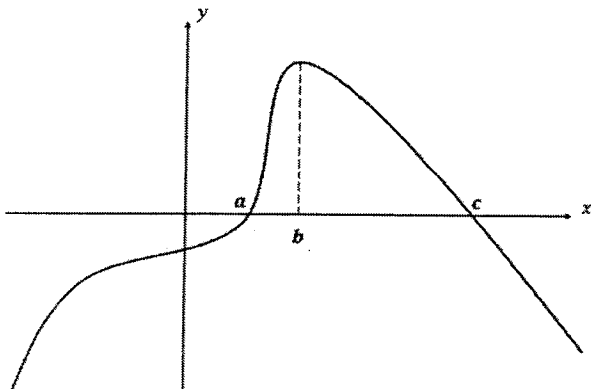
3. * (20 puntos) La arena que escurre por el agujero de un recipiente forma un montículo cónico cuya altura es igual al radio de su base. Cuando la altura del montículo es de 25 cm, aumenta a razón de 15 cm/min. Calcule la rapidez con la que sale el volumen de arena del agujero cuando la altura del montículo es de 25 cm.

2. Haga un análisis completo de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ para obtener el bosquejo de su gráfica. El análisis debe incluir:
- a) Dominio y raíces.
 - b) Intervalos donde crece y donde decrece.
 - c) Puntos críticos y su clasificación.
 - d) Intervalos de concavidad.
 - e) Puntos de inflexión.

3. * (15 puntos) Se desea construir un recipiente cilíndrico sin tapa que tenga un volumen de $24\pi \text{ cm}^3$. El material que se requiere para la base del recipiente cuesta tres veces más que el que se requiere para la parte lateral. Calcular las dimensiones del recipiente (radio y altura) para que el costo del material que se necesita para la fabricación sea mínimo.

SEGUNDA PARTE

1. Considerando el bosquejo de la gráfica de $f'(x)$, que se muestra a continuación, determinar para la función $f(x)$:
- a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - b) Puntos críticos de primer orden y su clasificación.
 - c) Puntos de inflexión.
 - d) Intervalos de concavidad.



TERCERA PARTE

1. * (10 puntos) Derivar la función:
- $$g(x) = xe^{-x^2} + \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\operatorname{sen} x}\right).$$
2. Derivar la función:
- $$h(x) = (\operatorname{sen} x)e^x.$$
3. * (20 puntos) Haga un análisis completo de la función $f(x) = (1 - x)e^{-x}$ para obtener el bosquejo de su gráfica. El análisis debe incluir:
- a) Dominio y raíces.
 - b) Intervalos donde crece y donde decrece.
 - c) Puntos críticos y su clasificación.
 - d) Intervalos de concavidad.
 - e) Puntos de inflexión.
4. * (10 puntos) Encuentre el polinomio de Taylor, de grado 3, de la función $f(x) = \arctan x$, alrededor del punto $c = -1$.