DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Evaluación global de Cálculo Diferencial (19-P)

Nombre ______________________________ 10:00-13:00 h

Indicaciones generales: El examen global consta de los ejercicios que se encuentran marcados con el símbolo $*$. En caso de presentar sólo una parte, resolver todos los ejercicios de dicha parte. **Toda respuesta debe mostrar el procedimiento.**

PRIMERA PARTE

1. *(15 puntos) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\sqrt{\dfrac{2x^{-4}+2}{x^2+1}}$ (b) $g(x) = \cos^2\left(\sqrt[3]{\cot(2x+3)}\right)$

2. *(15 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto $P(0,\pi)$ a la curva cuya ecuación es $x^2\cos^2(y) - \operatorname{sen}(y) = 0$.

3. *(15 puntos) En una fábrica de cemento se deposita arena de tal modo que se forma una pila cónica cuya altura es siempre igual a $\frac{4}{3}$ del radio de la base. Sabiendo que el radio de la base aumenta a razón de $\frac{1}{8}$ cm/s, ¿con qué rapidez aumenta el volumen de la pila de cemento cuando el radio de la base es de 90 cm?

SEGUNDA PARTE

1. Encontrar los máximos y mínimos absolutos en el intervalo $[\frac{1}{4}, 4]$ de la función $h(x) = x + \frac{1}{x}$.

2. De una función f se sabe que su derivada es $f'(x) = 3x^2 + 7x - 4$ y $f(0) = 3$.

(a) Determinar los puntos críticos e intervalos de monotonía de la función f.

(b) Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función f.

(d) Con la información proporcionada y lo obtenido en los incisos (a) y (b), dar un bosquejo de la gráfica de f.

3. *(15 puntos) En el primer cuadrante y con los ejes coordenados, cualquier recta que pasa por el punto $(3, 4)$ forma un triángulo. Determinar la ecuación de la recta que haga que el área de dicho triángulo sea la mínima.

TERCERA PARTE

1. *(10 puntos) Calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \arctan\left(e^{-(x+1)^2} - 3x\right) - \ln\left(\operatorname{arcsen}(x)\right)$$

2. Aplicando derivación implícita, calcular la derivada de $e^{\cos(xy)} = \operatorname{sen}(\ln(xy))$.

3. *(20 puntos) Considerar la función F definida por $F(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

   (a) Obtener el dominio y los ceros o raíces de F. Además, calcular $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

   (b) Determinar los puntos críticos de F y su clasificación.

   (c) Determinar los intervalos de monotonía de F.

   (d) Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de F.

   (e) Con base en la información anterior, bosquejar la gráfica de F.

   (f) Determinar un intervalo en el cual la función F tenga inversa.

4. *(10 puntos) Usando un polinomio de Taylor de grado 4, determinar un valor aproximado de $\sqrt{e^{0.0222}}$.