Evaluación Global de Cálculo Diferencial 23I. Turno Vespetino.

Nombre: Matrícula:

Indicaciones. Todos los problemas deben mostrar el procedimiento, justificación de afirmaciones o respuestas dadas. La respuesta pudiera ser correcta pero si no está justificada no cuenta. Deben ser explícitos los pasos de las operaciones. Los ejercicios marcados con porcentaje conforman la evaluación global. Los alumnos que presentan sólo una parte deben resolver todos los ejercicios de esa parte.

Primera Parte

1. 15 % Considerar el lugar geométrico

$$\frac{x^3}{y^2}+\frac{4}{\pi^2}=y^2+\frac{4x}{\pi^2}.$$

   a) Derivando implícitamente calcular $y'(x)$ (ó escrito de otra forma $\frac{dy}{dx}$).

   b) Calcular la ecuación de la recta tangente al lugar geométrico en el punto $(1,1)$.

2. Se descarga grano desde un transportador de banda, a razón de $10\,\text{ft}^{3}/\min$ y su grosura es tal que se forma un cono con diámetro de su base igual al doble de la altura. Determinar la rapidez con la que aumenta la altura del cono cuando éste tiene $15\,\text{ft}$ de altura. Nota. El volumen de un cono de radio r y altura h es $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

3. 15 % Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$a)\ f(x)=\frac{3x}{x^2+1} \qquad b)\ g(\theta)=\operatorname{sen}^3\left(\frac{\theta}{3}\right) \qquad c)\ h(y)=\sqrt[4]{\frac{y}{y-5}}.$$

Segunda Parte

1. 15% Se desea diseñar un envase tetrapack con base rectangular que contenga 2 litros. Si el largo de la base es la mitad de la altura del envase determinar las dimensiones que minimizan la cantidad de material empleado.

2. 20 % Sea $g(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2-4x+1$.

   i) Obtener su dominio, intervalos de continuidad y $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

   ii) Obtener la derivada de $g(x)$ y sus punto críticos.

   iii) Obtener los intervalos de monotonía de $g(x)$ y la clasificación de sus puntos críticos.

   iv) Obtener la segunda derivada de $g(x)$ y sus intervalos de concavidad.

v) Obtener el bosquejo gráfico de $g(x)$ y en base a la gráfica determinar cuántos ceros reales tiene $f(x)$.

3. Sea $h(x) = 3x + \dfrac{2}{x-1}$. Determinar los intervalos de convexidad y concavidad de la función $h(x)$.

Tercera Parte

1. 20 % Para la función $p(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$ determinar

   i) Dominio, ceros, intervalos de continuidad y límites a $-\infty$ y ∞.

   ii) Derivada y puntos críticos.

   iii) Intervalos de monotonía y clasificación de puntos críticos.

   iv) Bosquejo gráfico y rango.

2. Determinar el tipo de indeterminación de los límites siguientes y calcularlos usando la regla de L'hopital.

   i) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{7x+6} - \sqrt{4x+4} + 1}{\sqrt{5x+10} - 5}$

   ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$.

3. 15 % Aproximar el valor de $\sqrt[3]{66}$ por medio de un polinomio de Taylor de orden 3. Hacerlo mediante los siguientes pasos.

   a) Considerar función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Determinar el punto a donde se calculará la fórmula de Taylor

   b) Obtener la fórmula de Taylor hasta residuo de orden 4. **Indicación.** El cálculo de las derivadas y las evaluaciones necesarias debe ser explícito.

   c) Aproximar el valor de $\sqrt[3]{66}$ usando el polinomio de Taylor de orden 3.