DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Evaluación global de Introducción al Cálculo (16-O)

Nombre ________________________________ 10:00-13:00 h   13-12-16

Indicaciones generales: El examen global consta de los ejercicios indicados con asterisco. En caso de presentar sólo una parte, resuelva todos los ejercicios de dicha parte. **Toda respuesta debe mostrar el procedimiento.**

PRIMERA PARTE

1. Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese las soluciones usando notación de intervalos.

(a) $4x^2 + 3x - 5 \geq 3x^2 + 5x + 3$

(b) $\frac{3x-1}{x-3} < 2$

2.* **(10 p.)** Considere la función f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 0 \\ |x - 2|, & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ \sqrt{x - 4}, & \text{si } 4 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de f.

(b) Determine el dominio, el rango o imagen y las raíces o ceros de f.

(c) Obtenga la gráfica de $h(x) = -f(x - 1)$.

3.* **(15 p.)** Sean f, g y h funciones tales que $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $g(x) = \frac{9+x}{x^2-16}$ y $h(x) = \sqrt{9 - |x|}$.

(a) Obtenga los dominios de f, g y h, así como su paridad.

(b) Defina las funciones $\frac{f}{h}$ y $g \circ f$, y determine sus correspondientes dominios.

4.* **(10 p.)** Un alambre de longitud x se dobla en forma de un círculo. Exprese el área del círculo en función de x.

SEGUNDA PARTE

1.* **(10 p.)** Bosqueje la gráfica de la función g dada por $g(x) = 3\,\mathrm{sen}(2x) + 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, indicando su periodo, amplitud y rango o imagen.

2.* Calcule los siguientes límites:

(a) **(7 p.)** $\lim_{x \to 3} \frac{-x^2 + 5x - 6}{\sqrt{2x + 3} - 3}$ (b) **(6 p.)** $\lim_{x \to \infty} \frac{x - 3}{\sqrt{9x^2 + 25x - 1}}$ (c) **(7 p.)** $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{sen}(x) - \cos x}{1 - \cot(x)}$

3. Considere la función H, definida por $H(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2-4x+3}$.

(a) * **(5 p.)** Determine el dominio y los ceros o raíces de H, así como las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de H.

(b) * **(5 p.)** Bosqueje la gráfica de H y obtenga su rango o imagen.

(c) Determine los intervalos en los cuales H es creciente/decreciente.

4. Sea F la función definida como:

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), & \text{si } x < -\pi \\ ax + b, & \text{si } -\pi \leq x \leq 2\pi \\ 2\cos(x), & \text{si } x > 2\pi \end{cases}$$

Determine los valores de las constantes a y b para que existan $\lim\limits_{x \to -\pi} F(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2\pi} F(x)$.

TERCERA PARTE

1. Sea h la función definida como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } -1 < x < 1 \\ x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Encuentre el valor de las constantes adecuadas a y b, de modo que h sea continua en su dominio.

2.* **(10 p.)** Sea H la función definida por $H(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2-4x+3}$. (Note que la función H es la misma que la del ejercicio 3 de la segunda parte de esta evaluación).

(a) Determine los puntos de discontinuidad de H y su clasificación.

(b) Obtenga los intervalos de continuidad de la función H.

(c) Diga cómo redefiniría a la función H en las discontinuidades removibles, en caso de haberlas, a fin de que sea continua en tales puntos.

3.* **(15 p.)** Sea f la función definida como $f(x) = \sqrt{17 - x}$.

(a) Calcule $f'(1)$ usando la definición.

(b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, f(1))$.

4. Sea G la función tal que $G(x) = 1 + x^3 - 3\operatorname{sen}(x)$. Pruebe que G tiene al menos un cero o raíz en el intervalo $[-\pi, 0]$.