

Examen Global de Introducción al Cálculo. Trim. 16-P. Vespertino.

Los problemas del examen global están marcados con ► y tienen su valor indicado.

Todas las soluciones deben mostrar su desarrollo.

1ª. Parte

1. ► (15 puntos) Resolver: a) $4x^2 + 9x < 16 - 3x$ y b) $|5 - 4x| \geq 7$.

2. Si $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 11 & \text{Si } -5 \leq x \leq -3. \\ x & \text{Si } -1 < x < 1. \\ x^2 - 6x + 11 & \text{Si } 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$

Obtener:

- a) Su dominio y un esbozo gráfico de la función.
- b) El rango o imagen, los ceros o raíces, la paridad, los intervalos de monotonía y donde $f(x) \geq 0$.
- c) Un esbozo gráfico de $g(x) = 3f(-x) + 1$.

3. ► (15 puntos) Si $f(x) = \sqrt{4 - x}$ y $g(x) = x - \frac{4}{x}$.

Obtener:

- a) El dominio y las raíces o ceros de $f(x)$ y de $g(x)$.
- b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y su dominio.
- c) $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

4. Se desea construir un contenedor cerrado, rectangular y de base cuadrada, con 20 metros cuadrados de lámina. Determinar el volumen como una función de una sola variable.

2ª. Parte

1. ► (15 puntos) Calcular: a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x}$ y c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x + 8} - 3\sqrt{x})$.

2. Si $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$, Determinar:

- a) Dominio, ceros o raíces, paridad y punto de corte al eje y.
- b) Ecuaciones de las asíntotas verticales.
- c) Ecuaciones de las asíntotas horizontales.
- d) Esbozo gráfico.
- e) Rango o imagen, intervalos de monotonía y donde $f(x) \geq 0$.

3. ►(15 puntos) Obtener la gráfica de $f(x) = 3 \cos(2x + \pi) - 3$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ especificando las operaciones gráficas utilizadas, así como su dominio, ceros o raíces, rango o imagen, amplitud y cuál sería su periodo en caso de estar definida en todos los reales.
4. Determinar el dominio de la siguiente función y obtener los valores de a y de b para que existan los límites en -1 y en 1 .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+2}{x+2} & \text{Si } x \leq -1, \\ 5x + 2 & \text{Si } -1 < x < 1, \\ \frac{x^2-1}{x-1} + b & \text{Si } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

3ª. Parte

1. ►(15 puntos) Si $f(x) = \frac{3x^2-2x-1}{3x^2+7x+2}$. Determinar:
- Dominio, ceros o raíces, paridad y punto de corte al eje y .
 - Intervalos de continuidad clasificando las discontinuidades.
 - Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
 - Esbozo gráfico.
 - Rango o imagen, intervalos de monotonía y donde $f(x) \geq 0$.
2. ►(15 puntos) Determinar el dominio y los valores de las constantes a y b para que $f(x)$ sea continua en su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{x} & \text{Si } x \leq -1 \\ bx^2 + ax & \text{Si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{x^2+bx-x-b}{x-1} & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

Comprobando la condición de continuidad en los puntos considerados.

3. ►(10 puntos) Considerar la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.
Usando la definición de derivada mediante límites, obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(-1, f(-1))$.
4. Determinar un intervalo de longitud menor o igual a $\frac{\pi}{4}$ que contenga un cero o raíz, de la función $f(x) = (x+1) \cos x - x^2$. Justifique su respuesta.