

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Evaluación global de Introducción al Cálculo (16-O)

Nombre _____ 10:00-13:00 h 13-12-16

Indicaciones generales: El examen global consta de los ejercicios indicados con asterisco. En caso de presentar sólo una parte, resuelva todos los ejercicios de dicha parte. **Toda respuesta debe mostrar el procedimiento.**

PRIMERA PARTE

1. Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese las soluciones usando notación de intervalos.

(a) $4x^2 + 3x - 5 \geq 3x^2 + 5x + 3$

(b) $\frac{3x-1}{x-3} < 2$

2.* (15 p.) Considere la función f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 0 \\ |x - 2|, & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ \sqrt{x - 4}, & \text{si } 4 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de f .

(b) Determine el dominio, el rango o imagen y las raíces o ceros de f .

(c) Obtenga la gráfica de $h(x) = -f(x - 1)$.

3.* (15 p.) Sean f , g y h funciones tales que $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $g(x) = \frac{9+x}{x^2-16}$ y $h(x) = \sqrt{9 - |x|}$.

(a) Obtenga los dominios de f , g y h , así como su paridad.

(b) Defina las funciones $\frac{f}{h}$ y $g \circ f$, y determine sus correspondientes dominios.

4.* (10 p.) Un alambre de longitud x se dobla en forma de un círculo. Exprese el área del círculo en función de x .

SEGUNDA PARTE

1.* (10 p.) Bosqueje la gráfica de la función g dada por $g(x) = 3 \sin(2x) - 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, indicando su periodo, amplitud y rango o imagen.

2.* Calcule los siguientes límites:

(a) (7 p.) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 5x - 6}{\sqrt{2x + 3} - 3}$ (b) (6 p.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{\sqrt{9x^2 + 25x} - 1}$ (c) (7 p.) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos x}{1 - \cot(x)}$

3. Considere la función h , definida por $h(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2-4x+3}$. Bosqueje la gráfica de h , determinando su dominio, sus ceros o raíces, las ecuaciones de sus asíntotas, los intervalos donde la función h es creciente/decreciente y su rango o imagen.

4. Sea F la función definida como:

$$F(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right), & \text{si } x < -\pi \\ ax + b, & \text{si } -\pi \leq x \leq 2\pi \\ 2\cos(x), & \text{si } x > 2\pi \end{cases}$$

Determine los valores de las constantes a y b para que existan $\lim_{x \rightarrow -\pi} F(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2\pi} F(x)$.

TERCERA PARTE

1. Sea h la función definida como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } -1 < x < 1 \\ x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Encuentre el valor de las constantes adecuadas a y b , de modo que h sea continua en su dominio.

2.* (15 p.) Sea g la función tal que $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x-4}$.

- (a) Determine los puntos de discontinuidad de g y su clasificación.
- (b) Obtenga los intervalos de continuidad de la función g .
- (c) Diga cómo redefiniría a la función g en las discontinuidades removibles, en caso de haberlas, a fin de que sea continua en tales puntos.

3.* (15 p.) Sea f la función definida como $f(x) = \sqrt{17-x}$.

- (a) Calcule $f'(1)$ usando la definición.
- (b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, f(1))$.

4. Sea G la función tal que $G(x) = 1 + x^3 - 3\sin(x)$. Pruebe que G tiene al menos un cero o raíz en el intervalo $[-\pi, 0]$.