

EXAMEN GLOBAL DE INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Trimestre 18 I. Turno vespertino.

Nombre: _____ Matrícula: _____

El examen global completo consta de los ejercicios que se encuentran marcados con el símbolo • y cada uno tiene un puntaje. El tiempo de duración es de tres horas. Todas las respuestas deben tener su desarrollo.

PRIMERA PARTE

1. Determinar el dominio y las raíces de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2 - x}} \quad g(x) = \frac{|4x - 2| + 3}{5 - x^2}$$

• 2. (15 puntos) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2 + (1 + x)^2 & \text{si } -4 \leq x < -1 \\ 2 - |x| & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2 - (1 - x)^2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

- Elaborar el bosquejo de la gráfica de $f(x)$.
- Determinar el dominio y las raíces (ceros).
- Determinar la paridad, la monotonía y el rango.
- Encontrar los intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) \leq 0$.

• 3. (10 puntos) Considerar las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad y \quad g(x) = \frac{3 + x^2}{x^2 - 4}$$

- Determinar el dominio y las raíces de cada función.
- Obtener la expresión para las funciones $\frac{f}{g}$ y $g \circ f$, así como sus respectivos dominios.

• 4. (10 puntos) Un rectángulo está inscrito en una circunferencia de radio 5. Expresar el área del rectángulo en función de su ancho.

SEGUNDA PARTE

• 1. (15 puntos) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(2x)}{x \sin(2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3 + x}{2 - \sqrt{x^2 - 5}} \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(\frac{2}{3}) + x}{\sqrt[3]{3x^2 + 2x - 1}}$$

2. Sea

$$g(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

- Determinar el dominio, las raíces (ceros) y la paridad de la función.
- Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
- Elaborar un bosquejo de su gráfica.

• 3. (10 puntos) En el intervalo $[0, 2\pi]$, realizar el bosquejo de la gráfica de:

$$g(x) = -3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

Determinar también la amplitud, el periodo y el rango de $g(x)$.

TERCERA PARTE

• 1. (20 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{-x^2 - x + 12}{x^2 - 4x + 3}$$

Determinar:

- Dominio, raíces (ceros) y paridad
 - Intervalos de continuidad y clasificar sus discontinuidades.
 - Ecuaciones de asíntotas horizontales y verticales.
- Además, elaborar un bosquejo de la gráfica de la función.

• 2. (10 puntos) Obtener los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} b \sin x + a & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 - \cos x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ a \sin x + b & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

3. Encontrar un intervalo de longitud $\frac{\pi}{4}$ o menor, que contenga una solución de la ecuación $\sin x + 2 - x = 0$. Justificar la respuesta.

• 4. (10 puntos) Usando la definición de derivada, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = \sqrt{2x + 1} \quad \text{en el punto } \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$