

EXAMEN GLOBAL DE INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Trimestre 18 I. Turno matutino.

Nombre: _____

Matrícula: _____

El examen global completo consta de los ejercicios que se encuentran marcados con el símbolo • y cada uno tiene un puntaje. El tiempo de duración es de tres horas. Todas las respuestas deben tener su desarrollo.

PRIMERA PARTE

1. Determinar el dominio y las raíces de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-2x}{2x-1}} - 2 \quad g(x) = \frac{\left|\frac{3x}{5} - 1\right| - 3}{x^2 + 3}$$

• 2. (15 puntos) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 + (x+5)^2 & \text{si } x < -3 \\ -|x| + 1 & \text{si } |x| \leq 3 \\ \sqrt{x-3} - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- Elaborar el bosquejo de la gráfica de $f(x)$.
- Determinar el dominio y las raíces (ceros).
- Determinar la paridad, la monotonía y el rango.
- Encontrar los intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) \leq 0$.

• 3. (10 puntos) Considerar las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$$

- Determinar el dominio y las raíces de cada función.
- Obtener la expresión para las funciones $\frac{f}{g}$ y $g \circ f$, así como sus respectivos dominios.

• 4. (10 puntos) La longitud del radio de la base de un envase cilíndrico es la cuarta parte de su altura. Determinar la expresión de la superficie del envase en función del radio, considerando sus dos tapas.

SEGUNDA PARTE

• 1. (15 puntos) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \operatorname{sen} t}{1 - \cos t}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 8}}{x^2 + 3x} \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x} - 3x}{4 - 2x}$$

2. Sea

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

- Determinar el dominio, las raíces (ceros) y la paridad de la función.
- Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
- Elaborar un bosquejo de su gráfica.

• 3. (10 puntos) En el intervalo $[0, 2\pi]$, realizar el bosquejo de la gráfica de:

$$w(x) = -5 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

Determinar también la amplitud, el período y el rango de $w(x)$.

TERCERA PARTE

• 1. (20 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6}$$

Determinar:

- Dominio, raíces (ceros) y paridad
- Intervalos de continuidad y clasificar sus discontinuidades.
- Ecuaciones de asíntotas horizontales y verticales. Además, elaborar un bosquejo de la gráfica de la función.

• 2. (10 puntos) Obtener los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{si } x < -3 \\ ax + 3b & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3. Encontrar un intervalo de longitud $\frac{\pi}{4}$ o menor, que contenga una solución de la ecuación $2x - 1 - \cos x = 0$. Justificar respuesta.

• 4. (10 puntos) Usando la definición de derivada, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -5x^2 + 2x$ en el punto $(1, -3)$.