

Introducción al Cálculo. Evaluación Global 22 P. Vespertino.

Los ejercicios marcados con asterisco (*) son los que conforman la evaluación global.

Nombre:

Matrícula:

Primera parte.

1. * (10 %) Resolver las desigualdades

$$\text{a) } \frac{4x+3}{5x-2} \leq \frac{7}{4}, \quad \text{b) } \left| 3x - \frac{8}{3} \right| \geq \frac{5}{3}.$$

2. Determinar el dominio de la función

$$g(x) = \frac{2x^4 - 7x^3 + 10 + \sqrt{3x^2 + x - 4}}{|2x - 3| - \frac{7}{3}}.$$

3. * (15 %) Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$, $g(x) = \frac{x^2 + 16}{x^2 - 3}$.

- a) Determinar dominio y raíces (ceros) de cada función.
b) Determinar dominio y fórmula de cada una de las siguientes funciones

$$\left(\frac{f}{g} \right)(x) \quad \text{y} \quad g \circ f.$$

Segunda Parte.

1. * (15 %) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{-3 - x} & \text{si } -\infty < x < -3, \\ |x| - 2 & \text{si } -3 \leq x \leq 3, \\ x^2 - 8x + 18 & \text{si } 3 < x < \infty. \end{cases}$$

- a) Determinar el dominio y las raíces (ceros) de la función f .
b) Determinar el bosquejo de la gráfica de la función f .
c) En base a la gráfica determinar la paridad, monotonía y el rango (imagen).
d) Determinar los intervalos donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$.

2. Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4 - 3 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

- a) Obtener el bosquejo gráfico de la función f .
b) Determinar la amplitud, período, frecuencia y rango (imagen) de la función f .

3. * (20%) Calcular los siguientes límites

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{x^2+4x-5} \quad \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{2x^2-4x}$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-\cos(3y)}{y^2}.$$

4. Un envase cilíndrico con tapas tiene radio r el cual es la cuarta parte de su altura h .

- a) Escribir la superficie S del envase en términos del radio r .
- b) Escribir el volumen V del envase en términos de su altura h .

Tercera Parte

1. * (20%) Considerar la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x - 3}$.

- a) Determinar dominio, ceros e intervalos de continuidad de f .
- b) Calcular los límites correspondientes para determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales. Nota. Se deben escribir las estimaciones o cálculos necesarios para obtener los límites, en particular como hay límites con valor infinito debe ser claro el procedimiento para determinar el signo asociado al infinito.
- c) Obtener un bosquejo gráfico de la función $f(x)$.

2. * (20 %) Considerar la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \in (-\infty, -3), \\ c + 1 & \text{si } x = -3, \\ ax - 3b & \text{si } x \in (-3, 2], \\ \frac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

a) Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x).$$

- b) Determinar el valor de las constantes a y b para que la función g tenga límite en -3 y 2 y dar el valor de los límites correspondientes.
- c) Determinar el valor de la constante c para que la función sea continua en todo su dominio.

3. Encontrar un intervalo de longitud $\frac{\pi}{4}$ o menor que contenga una solución de la ecuación $x - 2 - 2\sin x = 0$. Justificar la respuesta.