

Introducción al Cálculo. Evaluación Global. 22P Matutino

Los ejercicios marcados con asterisco (*) son los que conforman la evaluación global.

Nombre:

Matrícula:

Primera parte.

1. *(10 %) Resolver las desigualdades

$$\text{a) } \frac{5x-2}{2x+3} \geq \frac{7}{4}, \quad \text{b) } \left| 4x - \frac{7}{3} \right| \leq \frac{5}{3}.$$

2. Determinar el dominio de la función

$$g(x) = \frac{3x^5 - 7x^3 + 10 + \sqrt{2x^2 + x - 3}}{|3x - 2| - \frac{11}{2}}.$$

3. *(15 %) Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$.

4. a) Determinar dominio y raíces (ceros) de cada función.
b) Determinar dominio y fórmula de cada una de las siguientes funciones

$$\left(\frac{f}{g} \right)(x) \quad \text{y} \quad g \circ f$$

Segunda Parte.

1. *(15 %) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 26 & \text{si } -\infty < x < -3, \\ 1 - |x| & \text{si } -3 \leq x \leq 3, \\ \sqrt{x-3} - 4 & \text{si } 3 < x < \infty. \end{cases}$$

- a) Determinar el dominio y las raíces (ceros) de la función f .
b) Determinar el bosquejo de la gráfica de la función f .
c) En base a la gráfica determinar la paridad, monotonía y el rango (imagen).
d) Determinar los intervalos donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$.
2. Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - 5 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.
- a) Obtener el bosquejo gráfico de la función f .
b) Determinar la amplitud, período, frecuencia y rango (imagen) de la función f .

3. *(20 %) Calcular los siguientes límites

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3} & \text{ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1-\sqrt{x^2-8}}{x^2+3x} \\ \text{iii)} \quad & \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(3y)}{\tan(5y)}. \end{aligned}$$

4. Un envase cilíndrico con tapas tiene radio r el cual es la cuarta parte de su altura h .

- a) Escribir la superficie S del envase en términos del radio r .
- b) Escribir el volumen V del envase en términos de su altura h .

Tercera Parte

1. *(20 %) Considerar la función $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 5x - 3}$.

- a) Determinar dominio, ceros e intervalos de continuidad de f .
- b) Calcular los límites correspondientes para determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales. Nota. Se deben escribir las estimaciones o cálculos necesarios para obtener los límites, en particular como hay límites con valor infinito debe ser claro el procedimiento para determinar el signo asociado al infinito.
- c) Obtener un bosquejo gráfico de la función $f(x)$.

2. *(20 %) Considerar la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & \text{si } x \in (-\infty, -3), \\ ax+3b & \text{si } x \in (-3, 2), \\ c+1 & \text{si } x = 2, \\ x^2-9 & \text{si } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

a) Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x).$$

- b) Determinar el valor de las constantes a y b para que la función g tenga límite en -3 y 2 y dar el valor de los límites correspondientes.
- c) Determinar el valor de la constante c para que la función sea continua en todo su dominio.

3. Encontrar un intervalo de longitud $\frac{\pi}{4}$ o menor que contenga una solución de la ecuación $2 - x + 2 \cos x = 0$. Justificar la respuesta.